

STANISŁAW JERZY GDULA

PODSTAWY TECHNIKI CIEPLNEJ DLA AUTOMATYKÓW

Wydanie drugie poprawione i uzupełnione

SPIS TREŚCI

	Str.
1. JEDNOSTKI MIAR I OZNACZENIA WIELKOŚCI FIZYCZNYCH STOSOWANYCH W TERMODYNAMICE.....	11
1.1. Układy jednostek miar	11
1.1.1. Układ jednostek SI	12
1.1.2. Ciężarowy układ jednostek	13
1.2. Jednostki masy i ilości substancji	13
1.3. Jednostki siły	16
1.4. Jednostki energii, pracy i ciepła	16
1.5. Jednostki mocy.....	18
1.6. Jednostki ciśnienia	18
1.7. Jednostka i skale temperatury	21
1.8. Zasady tworzenia oznaczeń	22
2. TERMICZNE RÓWNANIE STANU. ZEROWA ZASADA TERMODYNAMIKI ...	26
2.1. Stan termiczny czynnika. Termiczne parametry stanu..	26
2.1.1. Objętość właściwa	26
2.1.2. Ciśnienie	27
2.1.3. Temperatura. Zerowa zasada termodynamiki.....	29
2.2. Termiczne równanie stanu	32
2.3. Termiczne równanie stanu gazu doskonałego i półdoskonałego	35
3. PRZEMIANA TERMODYNAMICZNA	40
4. PIERWSZA ZASADA TERMODYNAMIKI	44
4.1. Sformułowanie pierwszej zasady termodynamiki	44
4.2. Energia układu	50

	Str.
4.3. Sposoby dostarczania i wyprowadzania energii z układu	53
4.3.1. Praca	53
4.3.2. Energia przekazywana ze strugą czynnika. Entalpia	62
4.3.3. Ciepło	66
4.3.4. Energia elektryczna	72
4.4. Równanie bilansu przemiany czynnika termodynamicznego	73
4.4.1. Bilans przemiany zamkniętej	75
4.4.2. Bilans przemiany otwartej	79
4.5. Kaloryczne równanie stanu	81
4.5.1. Zależności ogólne	81
4.5.2. Gaz doskonały i półdoskonały	85
4.6. Ciepło właściwe gazów doskonałych	88
5. DRUGA ZASADA TERMODYNAMIKI	92
5.1. Entropia	94
5.1.1. Entropia właściwa ciał stałych i cieczy.....	97
5.1.2. Entropia właściwa gazów doskonałych i półdoskonałych	98
5.2. Zasada wzrostu entropii	99
5.3. Szczególne przypadki drugiej zasady termodynamiki....	104
5.3.1. Druga zasada w zastosowaniu do silników cieplnych	104
5.3.2. Jednokierunkowość samorzutnego przepływu ciepła	107
5.4. Skutki nieodwracalności zjawisk	110
5.5. Elementy nieodwracalności zjawisk	113
5.5.1. Tarcie	113
5.5.2. Przepływ ciepła w kierunku spadku temperatury.	114
5.5.3. Mieszanie (dyfuzja)	115
5.5.4. Spontaniczna reakcja chemiczna	115

	Str.
5.6. Sposoby zmniejszania nieodwracalności zjawisk	116
5.7. Egzergia	117
6. TYPOWE PRZEMIANY CZYNNIKA TERMODYNAMICZNEGO	120
6.1. Izobara	121
6.2. Izochora	125
6.3. Izoterma	127
6.4. Adiabata	130
6.5. Politropa	136
6.6. Dławienie adiabatyczne	139
7. MIESZANINY GAZÓW.....	143
7.1. Skład mieszaniny gazów	143
7.2. Prawo Daltona	146
7.3. Termiczne równanie stanu mieszaniny gazów doskonałych lub półdoskonałych	149
7.4. Kaloryczne równanie stanu mieszaniny gazów doskonałych lub półdoskonałych	152
8. PARY I GAZY RZECZYWISTE.....	152
8.1. Stany skupienia substancji czystej	152
8.2. Izobaryczne wytwarzanie pary	154
8.3. Para mokra	157
8.4. Wykresy stanu	159
8.5. Para przegrzana - gaz rzeczywisty	161
8.5.1. Termiczne równanie stanu gazu rzeczywistego...	162
8.5.2. Kaloryczne równanie stanu gazu rzeczywistego..	167
9. GAZY WILGOTNE	173
9.1. Skład gazu wilgotnego	173
9.2. Termiczne równanie stanu gazu wilgotnego	178

	Str.
9.3. Kaloryczne równanie stanu gazu wilgotnego	179
9.4. Wykres $i-X$	181
9.5. Typowe przemiany izobaryczne gazu wilgotnego.....	183
9.5.1. Przemiana $K=$ idem	183
9.5.2. Mieszanie dwóch strumieni gazu wilgotnego....	184
9.5.3. Nawilżanie gazu wilgotnego strumieniem wilgoci	186
10. OBIEGI TERMODYNAMICZNE	188
10.1. Definicje i zależności ogólne	188
10.2. Obieg siłowni parowej	194
10.3. Obieg porównawczy silnika turbogazowego	200
10.4. Obiegi porównawcze tłokowych silników spalinowych..	202
10.4.1. Obieg porównawczy silnika wybuchowego.....	202
10.4.2. Obieg porównawczy silnika wstrzykowego.....	204
10.5. Obieg parowej ziębiarki sprężarkowej.....	205
11. SPALANIE	208
11.1. Paliwa	208
11.2. Skład paliwa	208
11.2.1. Paliwa gazowe	208
11.2.2. Paliwa stałe i ciekłe	209
11.3. Minimalne zapotrzebowanie tlenu i powietrza.....	210
11.4. Skład spalin	213
11.5. Bilans energetyczny procesu spalania	215
12. ELEMENTY TEORII PODOBIENSTWA ZJAWISK	219
13. PODSTAWOWE RÓWNANIA PRZEPŁYWU GAZÓW.....	226
13.1. Wprowadzenie	226
13.2. Równanie ciągłości	229

	Str.
13.3. Równanie ruchu	233
13.3.1. Równanie ruchu płynu nielepkiego	233
13.3.2. Równanie ruchu płynu lepkiego	235
13.4. Rozchodzenie się małych zaburzeń ciśnienia w płynie. Prędkość dźwięku	237
13.5. Jednowymiarowy, ustalony przepływ gazu w kanale o zmiennym przekroju	240
13.6. Parametry spoczynkowe	248
14. PRZEPŁYW GAZU W DYSZACH	250
14.1. Rodzaje dysz	250
14.2. Prędkość wypływu z dyszy adiabatycznej	251
14.3. Nieodwracalność przepływu w dyszy	253
14.4. Dysza Bendemanna	254
14.5. Dysza de Laval'a	260
15. PRZEPŁYW GAZU W RUROCIĄGACH	266
15.1. Tarcie przy przepływie w rurociągu	266
15.2. Ustalony przepływ gazu w rurociągu	270
15.2.1. Rurociąg krótki	270
15.2.2. Przepływ izotermiczny gazu doskonałego w rurociągu długim	272
15.3. Lokalne opory przepływu	275
15.4. Nieustalony, adiabatyczny przepływ gazu w rurociągu	276
16. PODSTAWOWE POJĘCIA Z WYMIANY CIEPŁA	280
17. PRZEWODZENIE I PRZENIKANIE CIEPŁA	284
17.1. Prawo Fouriera	284
17.2. Równania różniczkowe przewodzenia ciepła w ciałach stałych	288
17.3. Warunki brzegowe	292

	Str.
17.3.1. Warunek brzegowy trzeciego rodzaju	292
17.3.2. Warunek brzegowy pierwszego rodzaju.....	294
17.3.3. Warunek brzegowy drugiego rodzaju	295
17.4. Ustalone przewodzenie i przenikanie ciepła w przegrodach	296
17.4.1. Przegroda płaska	296
17.4.2. Przegroda rurowa	300
17.5. Nieustalone przewodzenie ciepła	304
17.5.1. Rozwiązanie ogólne problemu grzania i stygnięcia w środowisku o stałej temperaturze .	304
17.5.2. Rozwiązania szczegółowe dla płyty, walca i kuli	312
17.5.3. Zastosowanie transformacji Laplace'a.....	325
17.5.4. Rozwiązanie przybliżone dla dużych liczb Fouriera	330
17.5.5. Rozwiązanie przybliżone dla małych liczb Biota	330
18. KONWEKCYJNA WYMIANA CIEPŁA	333
18.1. Podstawowe zależności i metody badań	333
18.2. Konwekcja wymuszona	339
18.2.1. Przepływ w rurze	339
18.2.2. Przepływ wzdłuż powierzchni płaskiej	341
18.2.3. Przepływ prostopadle do rury	343
18.2.4. Przepływ prostopadle do pęku rur	344
18.3. Konwekcja swobodna	346
18.3.1. Konwekcja swobodna w przestrzeni nieograniczonej	346
18.3.2. Konwekcja swobodna w przestrzeni ograniczonej	348
18.4. Konwekcja przy skraplaniu pary	351
18.5. Konwekcja przy wrzeniu	353

	Str.
19. WYMIANA CIEPŁA PRZEZ PROMIENIOWANIE	357
19.1. Promieniowanie ciał stałych i cieczy	357
19.1.1. Emisja promieniowania	357
19.1.2. Absorpcja promieniowania	360
19.1.3. Wymiana ciepła przez promieniowanie pomiędzy ciałami rozdzielonymi ośrodkiem przezroczystym	361
19.2. Promieniowanie gazów	366
20. WYMIENNIKI CIEPŁA	369
20.1. Ustalony przepływ ciepła w wymiennikach przepływowych	371
20.1.1. Współprąd	374
20.1.2. Przeciwprąd	380
20.1.3. Prąd krzyżowy i prądy mieszane	384
20.1.4. Prądy dowolne	384
20.2. Nieustalony przepływ ciepła w wymienniku przepływowym	385

TAHLICE

	Str.
1. Właściwości fizyczne gazów technicznych	390
2. Średnie ciepło właściwe $(Mc_v) \Big _0^t$ kJ/(kmol deg) gazów półdoskonałych	391
3. Średnie ciepło właściwe $(Mc_v) \Big _0^T$ kJ/(kmol deg) gazów półdoskonałych	392
4. Entalpia fizyczna gazów półdoskonałych $(MH) \Big _0^t$ kJ/kmol	393
5. Parametry określające stan wody na linii granicznej $x=0$ i $x=1$	394
6. Parametry termodynamiczne ciekłej wody i przegrzanej pary wodnej	399
7. Właściwości powietrza wilgotnego nasyconego parą wodną przy ciśnieniu 1 bar	484
8. Wartość opałowa i ciepło spalania substancji jednorodnych ...	486
9. Wartość opałowa paliw stałych i ciekłych	487
10. Właściwości czynników ściębnionych	488
11. Właściwości cieplne ciał	489

W Y K R E S Y (we wkładce)

1. Wykres $i-x$ dla powietrza wilgotnego.
2. Wykres $\log p-i$ dla R12 (freon 12).
3. Wykres $i-s$ dla pary wodnej.

R o z d z i a ł 1

JEDNOSTKI MIAR I OZNACZENIA WIELKOŚCI FIZYCZNYCH
STOSOWANYCH W TERMODYNAMICE

1.1. Układy jednostek miar

Dwa główne układy jednostek, jakie obecnie są stosowane w technice, to układ SI i tzw. ciężarowy układ jednostek. Pierwszy z nich jest układem zalecanym, w przyszłości mającym uzyskać prawa wyłączności, drugi jest układem tradycyjnym, dopuszczonym czasowo do stosowania.

Każdy układ jednostek powstaje przez przyjęcie pewnego zbioru jednostek podstawowych. Są to jednostki określonych wielkości fizycznych, niezależne od siebie (tzn. żadna z nich nie może być utworzona z pozostałych). Maksymalna ilość tych jednostek podstawowych jest jednakowa w każdym układzie jednostek i wynosi 6 jednostek fizycznych oraz dwie uzupełniające jednostki geometryczne (jednostki kątów). Różnice pomiędzy poszczególnymi układami jednostek polegają na wyborze tych wielkości podstawowych i określeniu ich jednostek.

Jednostki wszystkich pozostałych wielkości fizycznych tworzy się z jednostek podstawowych przy wykorzystaniu praw fizyki wiążących te wielkości z wielkościami, których jednostki są jednostkami podstawowymi, bądź też zostały wcześniej zbudowane z jednostek podstawowych. Otrzymane w ten sposób jednostki innych wielkości są jednostkami głównymi tych wielkości fizycznych. W jednostkach głównych należy podstawiać te wielkości do równań fizycznych, by zachować poprawność wymiarową obliczeń. Jednak jednostki główne nie zawsze nadają się do praktycznego wyrażania wartości wielkości fizycznych, gdyż są bądź zbyt małe, bądź też zbyt duże.

Stosuje się wtedy odpowiednie ich dziesiętne wielokrotności lub części.

Poza określonymi wyżej jednostkami mającymi swój "rodowód" są używane inne jednostki powstałe przypadkowo, np. kaloria powstała w czasach, gdy ciepło uważano za odrębną wielkość fizyczną. Dziś kaloria znajduje się na liście jednostek energii, nie ma jednak żadnego powiązania logicznego z jednostkami podstawowymi jakiegokolwiek układu jednostek. Stosowania tego typu jednostek, jak również używanie jednostek zapożyczonych z innego układu stwarza konieczność ciągłego operowania przelicznikami, gdyż prawa fizyki wymagają, by wartości liczbowe zawartych w nich wielkości podstawić w jednostkach tego samego układu. Można spotkać w literaturze równania, w których te przeliczniki zostały "wbudowane", ale operowanie tego typu równaniami nie jest zalecane, gdyż korzyści płynące z ich stosowania są złudne, a przez powiązanie z konkretnymi jednostkami równania te tracą charakter ogólnych zależności fizycznych.

1.1.1. Układ jednostek SI

Układ ten jest układem międzynarodowym i nosi również nazwę układu MKS od pierwszych liter trzech pierwszych jednostek podstawowych tego układu. Jednostkami podstawowymi są:

- metr (m) - jednostka długości
- kilogram (kg) - jednostka masy,
- sekunda (s) - jednostka czasu,
- stopień Kelvina (deg, K) - jednostka temperatury,
- amper (A) - jednostka prądu,
- kandela (cd) - jednostka światłości,
- radian (rad) - jednostka kąta płaskiego (jedn. uzup.),
- steradian (sr) - jednostka kąta bryłowego (jedn. uzup.).

1.1.2. Ciężarowy układ jednostek

Układ ten różni się tym od układu jednostek SI, że w miejsce kilograma jako jednostki masy pojawia się jednostka siły - kilopond (kp) zwany też kilogramem-siłą (kg). Jednostka ta jest zdefiniowana jako siła nadająca masie 1 kg przyspieszenie $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$ (normalne przyspieszenie ziemskie). Wyrażając się językiem potocznym, jest to ciężar 1 kg masy w takim miejscu, w którym przyspieszenie ziemskie $g = g_n$. Lista jednostek podstawowych układu ciężarowego jest więc następująca: metr, kilopond (kilogram-siła), sekunda, stopień Kelvina, amper, kandela i jednostki uzupełniające: radian i steradian. Warto zauważyć, że jednostka masy jest w tym układzie jednostką wtórną i posługiwanie się kilogramem nie jest poprawne - jeśli się nim posługujemy musimy stosować wspomniany już przelicznik.

1.2. Jednostki masy i ilości substancji

Jednostką masy w układzie SI jest k i l o g r a m znajdujący się na liście jednostek podstawowych.

W układzie c i ę ż a r o w y m jednostka masy jest jednostką wtórną. Dla jej określenia posłużymy się najprostszym związkem fizycznym pomiędzy masą a siłą (jednostka podstawowa) i przyspieszeniem, którego jednostkę wcześniej utworzyliśmy z jednostek podstawowych (m/s^2). Prawem tym jest II zasada dynamiki, którą zapiszemy w postaci

$$m = \frac{F}{a}$$

Umawiając się, że jednostkę danej wielkości fizycznej będziemy ogólnie oznaczać symbolem tej wielkości wziętym w nawiasy [], mamy

$$[m] = \frac{[F]}{[a]} = \frac{\text{kp}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

Jednostkę tę nazywamy i n e r t e m

$$\text{inert} = \frac{\text{kp s}^2}{\text{m}}$$

Z definicji kiloponda łatwo wywnioskować, że inert jest większy od kilograma w stosunku

$$1 \text{ inert} = 9,80665 \text{ kg.}$$

Ponieważ przy stosowaniu ciężarowego układu jednostek nie rezygnuje się z kilograma jako jednostki masy, konieczne jest ciągłe przeliczanie tych jednostek polegające na dzieleniu masy wyrażonej w kilogramach przez zamiennik 9,80665. Zamiennikowi temu nadaje się często mylnie sens przyspieszenia ziemskiego i w tej formie umieszcza go we wzorach, co może prowadzić do błędnych skojarzeń. Np. przy obliczaniu prędkości dźwięku w gazie doskonałym przy użyciu stałej gazowej wyrażonej w takich "kombinowanych" jednostkach kp m/kg deg (w liczniku jednostka energii z układu ciężarowego, w mianowniku jednostka masy z układu SI) konieczne jest wprowadzenie wspomnianego zamiennika. Spotyka się w związku z tym równania zapisane w postaci $a = \sqrt{\gamma g RT}$. Ponieważ we wzorze tym nie występuje masa, można by sądzić, że prędkość dźwięku zależy od przyspieszenia ziemskiego, co jest oczywistym absurdem. Jedyną poprawną postacią tego równania jest $a = \sqrt{\gamma RT}$.

Kilogram i inert są jednostkami masy, a masa jest zarazem miarą ilości substancji. Ilość substancji można też mierzyć w innych jednostkach. Często używaną w chemii i w termodynamice jednostką ilości substancji jest **k i l o m o l** zdefiniowany następująco:

$$1 \text{ kmol} = M \text{ kg,} \tag{1.1}$$

gdzie M jest masą drobinową substancji równą sumie mas atomowych drobin. Należy pamiętać, że dla pierwiastków masa drobinowa nie zawsze równa się masie atomowej. Dla większości gazów (wyjątek stanowią gazy szlachetne) cząstki są zbudowane z kilku atomów - najczęściej dwóch, np. O_2 , N_2 , H_2 . Duże znaczenie kilomola w chemii i termodynamice wynika stąd, że zawiera on niezależnie od rodzaju substancji stałą liczbę cząstek (liczba Avogadro). Znaczenia tego faktu w zjawiskach chemicznych nie trzeba tłumaczyć. Termody-

namika natomiast operuje wielkościami makroskopowymi, ale związki między nimi, opisujące zjawiska makroskopowe, wynikają z sumowania się efektów zjawisk jakim podlegają poszczególne cząstki. Stąd też wiele równań termodynamicznych przybiera szczególnie prostą postać, gdy ilość substancji wyrazimy w kilomolach będących pośrednio miarą ilości cząstek. Ponieważ ilość kilomoli nie jest masą, więc też oznaczamy ją innym symbolem - n . Z definicji (1.1) kilomola wynika związek pomiędzy masą m i ilością kilomoli

$$m = n M. \tag{1.2}$$

Inną jednostką ilości substancji jest **n o r m a l n y m e t r s z e ś c i e n n y** (skrót nm^3) stosowany wyłącznie dla gazów. Jest to taka ilość substancji gazu, która w warunkach normalnych zajmuje objętość 1 m^3 . Jako warunki normalne przyjmujemy normalną temperaturę t_n i normalne ciśnienie p_n . W układzie jednostek SI przyjęto $t_n = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_n = 1 \text{ bar}$. Stosowane są też inne umowy co do warunków normalnych, np. $t_n = 25 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_n = 1 \text{ atm}$. Należy podkreślić, że nm^3 jest jednostką ilości substancji a nie objętości. Przy zmianie parametrów (temperatury i ciśnienia) gazu jego objętość się zmienia, natomiast ilość nm^3 jest stała. Ilość nm^3 oznaczamy symbolem V_n . Wielkość ta jest ściśle związana z ilością kilomoli, gdyż jak wiadomo, objętość jednego kilomola - tzw. objętość kilomolowa (Mv) - zależy tylko od parametrów gazu, nie zależy natomiast od rodzaju gazu. A więc przy parametrach normalnych $(Mv_n) = \text{const}$. Przy $t_n = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_n = 1 \text{ bar}$

$$(Mv_n) = 22,71 \text{ nm}^3/\text{kmol}. \tag{1.3}$$

Związek pomiędzy ilością normalnych metrów sześciennych V_n i ilością kilomoli możemy zatem zapisać następująco

$$V_n = n(Mv_n). \tag{1.4}$$

Połączenie równań (1.2) i (1.4) umożliwia bezpośrednie przeliczanie masy i ilości normalnych metrów sześciennych.

1.3. Jednostki siły

Jednostką siły w układzie SI jest 1 niuton (N) zdefiniowany jako siła nadająca masie 1 kg przyspieszenie 1 m/s^2 . Korzystając, jak uprzednio, z II zasady dynamiki mamy

$$1 \text{ N} = [F] = [m][a] = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.5)$$

W układzie c i ę ż a r o w y m jednostką siły jest kilopond, należący do jednostek podstawowych tego układu. Z przytoczonej wyżej (podrozdz. 1.1.2) definicji kiloponda wynika, że ponieważ nadaje on masie 1 kg przyspieszenie 9,80665 razy większe niż niuton, jest jednostką tylokrotnie większą

$$1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ N}. \quad (1.6)$$

1.4. Jednostki energii, pracy i ciepła

Praca i ciepło są sposobami przekazywania energii (a nie rodzajami energii - por. podrozdz. 4.3) i wyrażamy je w tych samych jednostkach co energię.

W układzie SI jednostką główną energii jest d ż u l (J). Dla znalezienia jednostki wymiarowej dżula należy posłużyć się jednym z praw fizycznych dotyczącym którejkolwiek z wymienionych wyżej wielkości. Wybierając np. najprostszą postać wzoru na pracę mamy

$$1 \text{ J} = [L] = [F][s] = 1 \text{ Nm},$$

po uwzględnieniu (1,5)

$$1 \text{ J} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}. \quad (1.7)$$

Do tego samego wyniku można dojść np. ze wzoru na energię kinetyczną ruchu postępowego

$$1 \text{ J} = [E] = [m][w]^2 = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Ponieważ dżul jest jednostką małą (np. dostarczenie do 1 kg wody energii 1 J powoduje wzrost jej temperatury o kilka dziesięciotysięcznych części stopnia) używamy w praktyce wielokrotności tej jednostki zwanej kilodżulem

$$1 \text{ kJ} = 10^3 \text{ J}. \quad (1.8)$$

Jednostką energii w ciężarowym układzie jednostek jest kilopondometr (kp m) równy pracy 1 kiloponda na drodze 1 metra. Z równania (1.6) po obustronnym pomnożeniu przez 1 m wynika

$$1 \text{ kp m} = 9,80665 \text{ J}. \quad (1.9)$$

Kilokaloria jest jednostką energii nie związaną z żadnym układem jednostek. Istnieje wiele definicji kilokalorii. Międzynarodowa kilokaloria jest zdefiniowana następująco:

$$1 \text{ kcal} = \frac{1}{860} \text{ kWh} \quad (1.10)$$

i różni się nieco od tzw. kilokalorii 15-stopniowej będącej ilością ciepła potrzebną do podgrzania 1 kg wody od $14,5^\circ\text{C}$ do $15,5^\circ\text{C}$. Jeżeli w (1.10) uwzględnimy podział godziny na sekundy $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$, oraz że $1 \text{ kWh} = 1 \text{ kJ} = 10^3 \text{ J}$, otrzymamy

$$1 \text{ kcal} = 4186,84 \text{ J}. \quad (1.11)$$

W praktyce inżynierskiej używany jest zaokrąglony przelicznik

$$1 \text{ kcal} = 4,19 \text{ kJ}. \quad (1.11a)$$

Dzieląc prawą stronę równania (1.11) przez 9,80665 otrzymujemy, na mocy (1.8)

$$1 \text{ kcal} = 426,79 \text{ kp m}. \quad (1.12)$$



1.5. Jednostki mocy

Jednostkę mocy uzyskujemy dzieląc jednostkę energii przez jednostkę czasu

$$[N] = \frac{[E]}{[t]}$$

W układzie SI jednostką tą jest wat (W)

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}, \quad (1.13)$$

a w układzie ciężarowym jednostek $1 \frac{\text{kp m}}{\text{s}}$ (bez nazwy). W oparciu o tę jednostkę zdefiniowana jest inna, zwana koniem mechanicznym

$$1 \text{ KM} = 75 \frac{\text{kp m}}{\text{s}}. \quad (1.14)$$

1.6. Jednostki ciśnienia

Jednostkę ciśnienia otrzymujemy dzieląc jednostkę siły przez jednostkę powierzchni

$$[P] = \frac{[F]}{[A]}$$

W układzie jednostek SI otrzymujemy stąd jednostkę główną ciśnienia zwaną paskalem (P)

$$1 \text{ P} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}. \quad (1.15)$$

Jednostka ta jest bardzo mała. Choć na przykład wyrazić w paskalach ciśnienie atmosferyczne trzeba by użyć liczby 5-cyfrowej.

Stąd też dla potrzeb praktycznych stosujemy jednostkę

$$1 \text{ bar} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad (1.16)$$

pamiętając o konieczności podstawiania do równań wartości wyrażonych w jednostce głównej. W meteorologii jest używany milibar

$$1 \text{ mbar} = 10^{-3} \text{ bar} = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (1.17)$$

W ciężarowym układzie jednostek jednostka ciśnienia jest 9,80665 razy większa od paskala

$$1 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} = 9,80665 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (1.18)$$

i dla celów praktycznych używa się jednostki 10^4 razy większej (a więc rzędu bara) zwanej atmosferą techniczną (at)

$$1 \text{ at} = 10^4 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}. \quad (1.19)$$

Ze skojarzenia równań (1.16), (1.18) i (1.19) wynika związek pomiędzy atmosferą techniczną i barem

$$1 \text{ at} = 0,980665 \text{ bar}, \quad (1.20)$$

i związek odwrotny

$$1 \text{ bar} = 1,01972 \text{ at}. \quad (1.21)$$

Do pomiaru niewysokich ciśnień lub niedużych różnic ciśnień stosuje się manometry cieczowe, w których mierzone ciśnienie jest zrównoważone ciśnieniem hydrostatycznym słupa cieczy

$$p = h \rho g. \quad (1.22)$$

Dla ustalonej gęstości cieczy manometrycznej i ustalonego przyspieszenia ziemskiego ciśnienie można wyrażać w jednostkach długości (najczęściej w milimetrach) słupa cieczy. I tak dla wody przy

$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ i $g = g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$, po podstawieniu do (1.22) mamy

$$1 \text{ mm H}_2\text{O} = 0,001 \text{ m} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,80665 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} \quad (1.23)$$

Rtęć jest częściej stosowaną cieczą manometryczną z uwagi na jej dużą gęstość. Gęstość ta jednak zależy dość znacznie od temperatury i z faktem tym należy się liczyć nawet przy średnio dokładnych pomiarach inżynierskich. Ciśnienie wywierane przez 1 mm słupa rtęci o temperaturze $t = 0^\circ\text{C}$, przy $g = g_n$ jest nazywany torrem

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ Tr} = 1 \text{ mm Hg} \quad \left| \begin{array}{l} t_{\text{HG}} = 0^\circ\text{C}, \\ g = g_n \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Ponieważ gęstość rtęci w temperaturze 0°C wynosi $\rho_0 = 13,595 \text{ kg/m}^3$, więc

$$1 \text{ Tr} = 13,595 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} = 133,322 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (1.25)$$

Drugi z wyżej przytoczonych równoważników wynika z relacji (1.18). Jeżeli temperatura słupka rtęci różni się od 0°C , należy uwzględnić współczynnik rozszerzalności rtęci, a przy dokładnych pomiarach uwzględnić również rozszerzalność skali. Operowanie współczynnikami rozszerzalności nie jest jednak wygodne. Dla celów praktycznych bardziej użyteczne są gotowe dane liczbowe wyrażające ilość mm Hg równoważących w danej temperaturze ciśnienie 1 bar, przy $g = g_n$. Jeżeli wielkość tą oznaczymy przez h_{t1} , a zmierzoną w temperaturze t wysokość słupa rtęci przez h_t , to dla obliczenia ciśnienia p wyrażonego w barach otrzymamy wzór

$$p = \frac{h_t}{h_{t1}} \quad (1.26)$$

Wartości h_{t1} dla podziałki drewnianej i mosiężnej podano w zestawieniu 1.1.

Zestawienie 1.1

Wysokość h_{t1} słupa rtęci
równoważąca ciśnienie 1 bar przy $g = g_n$

$t \text{ } ^\circ\text{C}$		0	5	10	15	20	25
h_{t1} mm Hg bar	podz. drewn.	750,06	750,74	751,42	752,10	752,79	753,48
	podz. mosiężna	750,06	750,67	751,28	751,89	752,50	753,11

W oparciu o torr jest zdefiniowana jeszcze jedna jednostka ciśnienia zwana atmosferą fizyczną

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ Tr} \quad (1.27)$$

Jednostka ta jest często stosowana dla określania warunków normalnych. Związek liczbowy atmosfery fizycznej z barem i atmosferą techniczną jest następujący

$$1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bar} = 1,033 \text{ at} \quad (1.28)$$

1.7. Jednostka i skala temperatury

Zarówno w układzie jednostek SI jak i w układzie ciężarowym jednostką temperatury jest stopień. Jednostka ta jest niezależna od skali - Celsjusza lub Kelvina i uniwersalnym jej oznaczeniem jest deg.

$$1 \text{ deg} = 1^\circ\text{K} = 1^\circ\text{C} \quad (1.29)$$

Skrótu deg używamy we wszystkich jednostkach złożonych - np. jednostką ciepła właściwego jest J/kg deg - oraz wtedy, gdy podajemy przyrost temperatury.

Oznaczenia $^{\circ}\text{K}$ lub $^{\circ}\text{C}$ używamy tylko wtedy, gdy podajemy wartość temperatury na określonej skali. Jednostka temperatury (1.29) jest zdefiniowana jako $\frac{1}{273,16}$ (dokładnie) część temperatury bezwzględnej punktu potrójnego dla wody

$$1 \text{ deg} = \frac{100}{27316} T_{t, \text{H}_2\text{O}} \quad (1.30)$$

Punkt zerowy na skali Celsjusza jest zdefiniowany temperaturą o $1/100$ deg mniejszą od temperatury punktu potrójnego dla H_2O , a zatem związek pomiędzy temperaturą bezwzględną T i temperaturą w skali Celsjusza jest następujący

$$T = t + 273,15, \quad (1.31)$$

przy czym wartość 273,15 jest wartością dokładną.

1.8. Zasady tworzenia oznaczeń

Większość występujących w termodynamice wielkości dotyczących określonej substancji można podzielić na kilka grup, przy czym pomiędzy odpowiednimi elementami poszczególnych grup istnieją takie same powiązania. Umożliwia to wprowadzenie pewnej prawidłowości oznaczeń.

Pierwszą grupę stanowią wielkości ekstensywne. Są to wielkości proporcjonalne do ilości substancji, np. objętość V , energia E , ciepło dostarczone Q . Jest oczywiste, że objętość zajmowana przez np. 3-krotnie większą masę tej samej substancji jest 3-krotnie większa, podobnie wzrasta jej energia jak i ilość ciepła jaką należy dostarczyć w celu wywołania tego samego przyrostu temperatury. Wielkości ekstensywne będziemy oznaczali dużymi literami alfabetu łacińskiego.

Skoro wielkości ekstensywne są proporcjonalne do ilości substancji, więc każdą z nich można napisać w postaci iloczynu ilości substancji i wielkości niezależnej od niej zwanej wielkością intensywną. Jeżeli ilość substancji będziemy wyrażali jej

masą, będą to wielkości właściwe oznaczane odpowiednimi małymi literami alfabetu łacińskiego. Np. objętość V możemy zapisać następująco $V = m v$, gdzie $v = V/m$ jest objętością właściwą niezależną od ilości substancji. Jest ona odwrotnością gęstości i zależy wyłącznie od stanu czynnika. Podobnie jest z energią właściwą $e = E/m$. Wielkość właściwą $q = Q/m$ nazywamy ciepłem jednostkowym, gdyż nazwa ciepło właściwe ma tradycyjnie inne znaczenie. Ciepło jednostkowe dostarczone do substancji nie zależy od jej masy, a jedynie od wywołanego jego dostarczeniem przyrostu temperatury i od rodzaju przemiany.

Jeżeli ilość substancji wyrazimy za pomocą ilości kilomoli n , to miejsce wielkości właściwych zajmą wielkości kilomolowe. I tak np. dla objętości, z definicji objętości właściwej i definicji kilomola (równ. (1.2)) wynika

$$V = m v = n M v.$$

Widać stąd, że objętość kilomolowa jest iloczynem masy drobinowej M i objętości właściwej v . Zapis iloczynu pozostawiamy jako dwuliterowy symbol wielkości, biorąc go w nawiasy okrągłe dla podkreślenia, że jest to jedna wielkość. Tak więc

$$V = n(Mv).$$

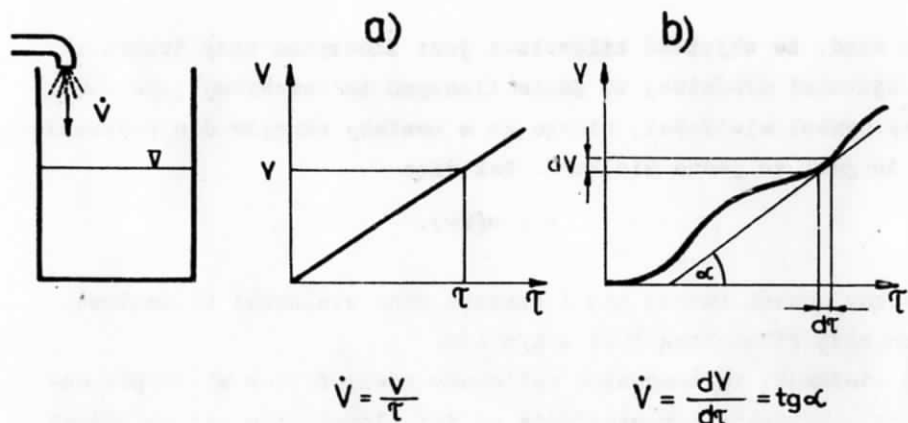
W podobny sposób tworzy się i oznacza inne wielkości kilomolowe, np. energię kilomolową $(Me) = E/n$ itp.

Do wielkości intensywnych zaliczamy również inne wielkości dotyczące substancji i niezależnie od jej ilości, nie mające jednak odpowiednika wśród wielkości ekstensywnych. Wielkościami tymi są ciśnienie i temperatura.

Wielkości znajdujące się w przepływie opisujemy za pomocą ich strumieni zwanych również natężeniami przepływu. Charakteryzując np. wydajność pompy podamy strumień objętości (objętościowe natężenie przepływu) wyrażające objętość pompowanej cieczy przypadającą na jednostkę czasu. Pomiaru tej

wielkości można dokonać m.in. przez pompowanie cieczy do zbiornika i mierzenie jej objętości w różnych momentach czasu. Jeżeli pompa działa w stanie ustalonym wykres zależności objętości cieczy w zbiorniku od czasu będzie linią prostą (rys. 1.1a) i strumień objętości wyrazi się stosunkiem objętości V przepompowanej w dowolnym czasie τ do tego czasu. W przypadku nieustalanej pracy pompy uzyskamy wykres zależności V od τ jak na rys. 1.1b. Chwilową wartość strumienia objętości (wydajności pompy) uzyskamy dzieląc nieskończenie mały przyrost objętości cieczy w zbiorniku przez przyrost czasu, czyli obliczając pochodną funkcji $V(\tau)$ w danej chwili. Definicja ta jest ogólniejsza i mieści w sobie omówiony uprzednio przypadek przepływu ustalonego. Oznaczeniem strumienia jakiejś wielkości jest oznaczenie pochodnej podług czasu, tzn. symbol wielkości, której strumień liczymy opatrzony u góry kropką

$$\dot{V} = \frac{dV}{d\tau}$$



Rys. 1.1. Pomiar i określenie strumienia objętości
a) dla stanu ustalonego, b) dla stanu nieustalonego

wionych uprzednio przykładowych wielkości zależności te są następujące:

$$\dot{V} = \dot{m} v = \dot{n}(Mv)$$

$$\dot{E} = \dot{m} e = \dot{n}(Me)$$

$$\dot{Q} = \dot{m} q = \dot{n}(Mq)$$

Ostatnie z powyższych równań dotyczy strumienia ciepła dostarczanego (lub odbieranego) do strumienia przepływającej substancji - np. strumień ciepła dostarczanego do powietrza w nagrzewnicy powietrza o wydajności masowej \dot{m} . Strumień ciepła może nie być związany ze strumieniem substancji - np. strumień ciepła przepływającego przez przegrodę dzielącą dwie przestrzenie o różnych temperaturach (ściana ogrzewanego budynku itp.).

Jeżeli przepływ danej wielkości wiąże się z przepływem strumienia substancji, to strumień tej wielkości można przedstawić jako iloczyn strumienia substancji (wyrażonego strumieniem masy lub strumieniem kilomoli) i odpowiedniej wielkości intensywnej. Dla omó-

R o z d z i a ł 2

TERMICZNE RÓWNANIE STANU. ZEROWA ZASADA TERMODYNAMIKI

2.1. Stan termiczny czynnika. Termiczne parametry stanu

Pod pojęciem stanu jakiegos obiektu rozumiemy w mowie potocznej zespół pewnych wielkości, które dla danego obiektu mogą przybierać różne wartości, przy czym ich zmiana wiąże się ze zmianą stanu. Wielkości te można nazwać parametrami stanu. Parametrów stanu nie należy mieszać z właściwościami będącymi istotnymi cechami obiektu. Właściwości nie mogą dla danego obiektu zmieniać się tak, jak parametry stanu, a co najwyżej mogą w ograniczonym stopniu zależeć od stanu obiektu.

Stan termiczny czynnika termodynamicznego określają parametry: temperatura, ciśnienie i objętość właściwa, zwane termicznymi parametrami stanu.

2.1.1. Objętość właściwa

Objętość właściwa jest stosunkiem objętości do masy

$$v = \frac{V}{m} \quad (2.1)$$

i jest równa odwrotności gęstości

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (2.2)$$

Do wyrażania stanu termicznego czynnika można by używać któregośkolwiek z tych dwu parametrów, jednakże z uwagi na dogodność zapisu równań używa się w termodynamice prawie wyłącznie objętości właściwej. Natomiast równania mechaniki płynów zapisują się lepiej przy

użyciu gęstości i ten wzgląd decyduje o częstszym jej używaniu w tej dziedzinie.

2.1.2. Ciśnienie

Ciśnienie jest stosunkiem siły wywieranej przez czynnik na ściankę nieruchomą względem czynnika do pola jej powierzchni

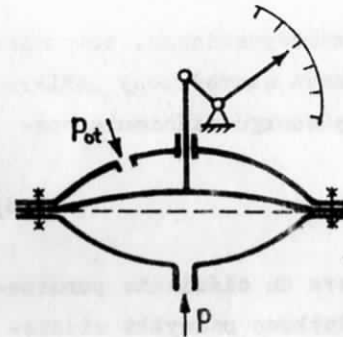
$$p = \frac{F}{A} \quad (2.3)$$

Ponieważ na siłę pochodzącą od ciśnienia wywieranego przez czynnik mogą nakładać się inne siły, ciśnienie to nazywamy ciśnieniem bezwzględnym. W olbrzymiej większości przypadków ścianka, na którą wywiera ciśnienie czynnik jest poddana z drugiej strony sile pochodzącej od ciśnienia wywieranego przez otoczenia i działającej w kierunku przeciwnym. To zatem, co obserwujemy lub mierzymy (np. odkształcenie ścianki), jest wynikiem działania różnicy ciśnień bezwzględnych: danego czynnika p i otoczenia p_{ot} . Wielkość tą nazywamy ciśnieniem manometrycznym

$$p_m = p - p_{ot} \quad (2.4)$$

Jeżeli jest ono dodatnie, to nazywane jest nadciśnieniem, jeżeli zaś jest ujemne ($p < p_{ot}$), to jego bezwzględna wartość nazywa się podciśnieniem lub próżnią. Dzieląc je przez ciśnienie otoczenia otrzymujemy tzw. próżnię względną

$$p_v = \frac{p_{ot} - p}{p_{ot}} \quad (2.5)$$



Rys. 2.1. Manometr membranowy

Cisnienie manometryczne jest wielkością wynikłą ze sposobu pomiaru ciśnienia przyrządem zwanym manometrem. W manometrze różnica sił pochodzących od ciśnienia mierzonego i ciśnienia otoczenia jest równoważona inną siłą; siłą sprężystości elementu poddanego działaniu ciśnienia, np. membrany w manometrze membranowym. (rys. 2.1) lub ciężarem słupa cieczy, w manometrze cieczowym.

Najprostszym wykonaniem manometru cieczowego jest tzw. U-rurka (rys. 2.2). Cisnienie manometryczne mierzone manometrem cieczowym obliczamy z równania

$$p_m = h \rho_m g, \quad (2.6)$$

gdzie h jest różnicą poziomów cieczy w manometrze, ρ_m - gęstością cieczy manometrycznej, g - przyspieszeniem ziemskim. Wzór (2.6) obowiązuje w przypadku, gdy gęstość czynnika, którego ciśnienie

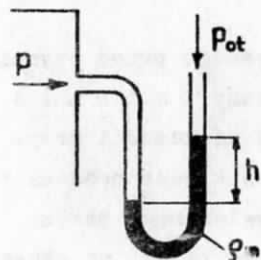
mierzymy, jest znacznie mniejsza od gęstości cieczy manometrycznej. W przeciwnym przypadku należy operować różnicą gęstości cieczy manometrycznej ρ_m i czynnika, którego ciśnienie mierzymy ρ

$$p_m = h(\rho_m - \rho)g. \quad (2.7)$$

Jeżeli ciśnienie mierzymy jako wielkość termodynamiczną, to pomiar ciśnienia manometrycznego powinien być zawsze uzupełniony pomiarem ciśnienia otoczenia tak, aby można było wyznaczyć ciśnienie bezwzględne

$$p = p_m + p_{ot}. \quad (2.8)$$

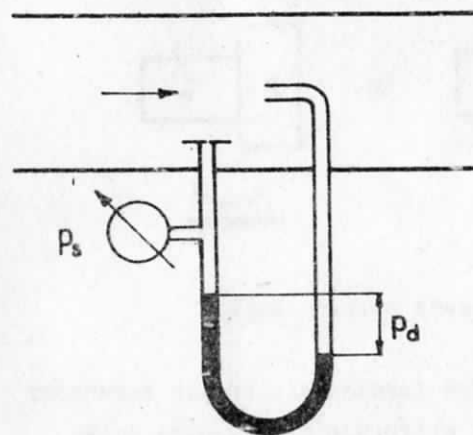
Jeżeli płyn i powierzchnia, na którą wywiera on ciśnienie poruszają się względem siebie, to pojawia się dodatkowo nadwyżka ciśnienia. Największą wartość tej nadwyżki, uzyskaną w przypadku całkowitego lokalnego zahamowania strugi, nazywamy ciśnieniem



Rys. 2.2. Manometr cieczowy

dynamicznym. Zależy ono od prędkości w wzajemnego ruchu płynu i elementu poddanego ciśnieniu oraz gęstości płynu ρ

$$p_d = \frac{\rho w^2}{2}. \quad (2.9)$$



Rys. 2.3. Ciśnienie statyczne i dynamiczne

Mierząc ciśnienie jako parametr termiczny należy wyeliminować zupełnie wpływ ciśnienia dynamicznego. Ponieważ pomiar ciśnienia przepływającego płynu przyrządem nieruchomym względem niego (poruszającym się z tą samą prędkością) nie jest możliwy, więc należy tak dokonać poboru impulsu ciśnienia do przyrządu nieruchomego (względem którego płyn

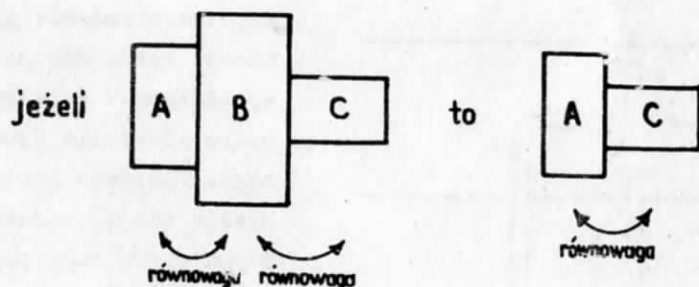
porusza się), by nie wystąpiło zupełnie lokalne zahamowanie strugi gazu. W tym celu pobieramy impuls ciśnienia ze środka płytki ustawionej stycznie do strugi gazu (tzw. tarczy wyrównującej). Sposób pomiaru ciśnienia statycznego i dynamicznego pokazano za rysunku 2.3.

2.1.3. Temperatura. Zerowa zasada termodynamiki

Wiele pojęć, którymi operuje termodynamika, to pojęcia wzięte z mechaniki. Ponieważ mechanika jest dziedziną logicznie wcześniejszą od termodynamiki, pojęć tych w termodynamice nie definiuje się. Przykładem może być siła i związane z nią ciśnienie. Temperatura jest wielkością typowo termodynamiczną i musi być zdefiniowana przez termodynamikę.

Istnienie parametru termicznego zwanego temperaturą wynika z aksjomatu zwanego zerową zasadą termodynamiki lub zasadą tranzy-

tywności równowagi termicznej. W myśl tej zasady z równowagi termicznej dwóch par utworzonych z trzech ciał (np. A i B oraz B i C) wynika równowaga trzeciej pary (A i C). Ilustracją graficzną tej zasady jest rysunek 2.4.



Rys. 2.4. Zerowa zasada termodynamiki

Jeżeli dwa ciała są w równowadze termicznej, to ich parametry termiczne nie zmieniają się i nie występują między nimi żadne przepływy energii. Jest oczywiste, że nie zawsze dwa ciała (np. A i B) są w równowadze. Należy to rozumieć w ten sposób, że nie każde dwa stany termiczne tych ciał są stanami wzajemnej równowagi. Narzucanie warunku równowagi dwóch ciał jest tym samym ograniczeniem swobody wyboru parametrów stanu p_A, v_A i p_B, v_B tych ciał. Matematyczną konsekwencją tego stwierdzenia jest istnienie zależności

$$f_1(p_A, v_A, p_B, v_B) = 0. \quad (2.10)$$

Podobna zależność odpowiada równowadze ciał B i C

$$f_2(p_B, v_B, p_C, v_C) = 0. \quad (2.11)$$

W myśl zerowej zasady termodynamiki z istnienia dwóch zależności (2.10) i (2.11) wynika również trzecia

$$f_3(p_A, v_A, p_C, v_C) = 0. \quad (2.12)$$

Można wykazać, że równoczesne spełnienie się równań (2.10)-(2.12) pociąga za sobą istnienie związku^{*}

$$\varphi_1(p_A, v_A) = \varphi_2(p_B, v_B) = \varphi_3(p_C, v_C) = t. \quad (2.13)$$

Z zerowej zasady termodynamiki wynika zatem, że dla każdego ciała istnieje jednoznaczna funkcja ciśnienia i objętości właściwej, przy czym dla ciał będących w równowadze wartości tej funkcji są sobie równe. Funkcję tę nazywamy temperaturą empiryczną. W celu określenia skali temperatur należy dla pewnego ciała wzorcowego przyjąć określoną postać tej funkcji. Np. można przyjąć rtęć jako tę substancję wzorcową, a jako postać równania stanu - liniową zależność objętości właściwej od temperatury. Ponieważ funkcja liniowa zawiera dwie stałe, to dla ich określenia należy przyjąć dwa stałe punkty na skali temperatur. Historycznie pierwszymi i do niedawna jeszcze obowiązującymi punktami były temperatury topnienia lodu i wrzenia wody przy ciśnieniu 1 atm (760 Tr).

Mierząc objętość właściwą i ciśnienie substancji termometrycznej (zwykle jeden z tych parametrów ustala się) wyznaczamy pośrednio temperaturę termometru. W celu zmierzenia temperatury dowolnego ciała należy termometr doprowadzić do stanu równowagi termicznej z tym ciałem i wyznaczyć temperaturę termometru. W wypadku, gdy osiągnięcie stanu równowagi nie jest możliwe, konieczne jest wprowadzenie odpowiednich korektur wskazania termometru. Zagadnienie takie występuje przy pomiarze temperatur zmiennych w czasie, a także przy pomiarze temperatur ustalonych w przypadku gdy nie jest możliwe uzyskanie wyrównania temperatury w całej masie termometru (termometr kontaktuje się nie tylko z ciałem mierzonym, ale i z ciałem o innej temperaturze). W obu przypadkach występują w termometrze przepływy energii spowodowane różnicami temperatur. Skory-

^{*} Por. np. J. Werle: Termodynamika fenomenologiczna, PWN, 1957.

gowanie wskazania termometru jest możliwe na podstawie znajomości praw wiążących przepływ energii z różnicą temperatur (patrz rozdział 17).

W zależności od wyboru substancji termometrycznej oraz od narzuconej dla niej postaci równania (2.13) otrzymujemy różne skale temperatury empirycznej. Wybór "najlepszej" spośród nich jest możliwy w oparciu o drugą zasadę termodynamiki. Ta najlepsza ze skal empirycznych nazywa się **t e r m o d y n a m i c z n ą** skalą temperatur.

B e z w z g l ę d n ą skalą temperatur nazywamy skalę, na której zerem jest dolny kres temperatur możliwych do osiągnięcia. Temperaturę bezwzględną oznaczamy symbolem T . Temperatura bezwzględna może być oczywiście temperaturą empiryczną, jak i termodynamiczną. W układzie jednostek SI związek pomiędzy temperaturą bezwzględną T i temperaturą w skali Celsjusza t określa równanie

$$T = t + 273,15$$

wynikające z przyjętej definicji jednostki temperatury (rozdz. 1) i z przyjęcia zera na skali Celsjusza w temperaturze o $1/100$ deg niższej od temperatury punktu potrójnego dla H_2O .

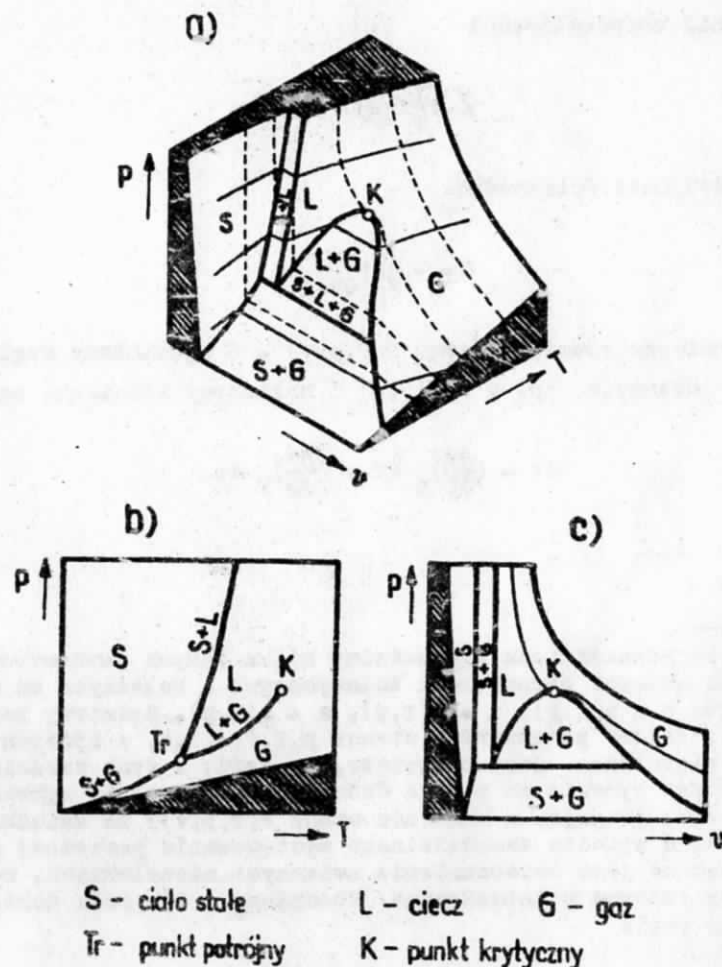
2.2. Termiczne równanie stanu

Z zerowej zasady termodynamiki wynika nie tylko istnienie temperatury jako trzeciego (obok ciśnienia i objętości właściwej) parametru termicznego, ale również istnienie zależności pomiędzy termicznymi parametrami stanu (2.13). Zależność tę nazywamy termicznym równaniem stanu. Nie uprzywilejowując żadnego z parametrów, możemy równanie stanu zapisać następująco:

$$F(T, p, v) = 0. \quad (2.14)$$

Z faktu istnienia termicznego równania stanu wynika, że mamy tylko dwa stopnie swobody przy wyborze parametrów stanu czynnika. Dla

jednoznacznego określenia stanu czynnika wystarczy podać dwa parametry termiczne. Zwykle stan czynnika opisuje się za pomocą temperatury i ciśnienia, gdyż wielkości te są najłatwiej mierzalne. Geometryczną interpretacją równania stanu jest powierzchnia w przestrzeni T - p - v . Przykład takiej powierzchni pokazano na rysunku 2.5a.



Rys. 2.5. Powierzchnia stanu substancji rzeczywistej (a) i jej rzuty na płaszczyznę p - T (b) i na płaszczyznę p - v (c)

Dla potrzeb praktycznych wykonujemy "mapę" tej powierzchni, np. na płaszczyźnie p-v (rys. 2.5c). Na wykresie tym "poziomicami" są linie stałej wartości temperatury (izotermy).

Z wzajemną zmiennością termicznych parametrów stanu wiążą się następujące empiryczne współczynniki: współczynnik rozszerzalności^{x)}

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p, \quad (2.15)$$

współczynnik rozprężliwości

$$\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v, \quad (2.16)$$

oraz współczynnik ściśliwości

$$\varepsilon = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T. \quad (2.17)$$

Jeżeli termiczne równanie stanu $F(T, p, v) = 0$ rozwikłamy względem jednej ze zmiennych, np. $v = v(T, p)$ i obliczymy różniczkę zupełną

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp,$$

^{x)} W dalszych rozważaniach wprowadzimy kilka innych parametrów stanu czynnika zwanych parametrami kalorycznymi i zależnych od stanu termicznego: $u = u(T, p)$, $i = i(T, p)$, $s = s(T, p)$. Będziemy zatem operować sześcioma parametrami stanu: p, T, v, u, i, s , z których tylko dwa są niezależne. Jest oczywiste, że każdy z tych sześciu parametrów można wyrazić za pomocą dwóch innych dowolnie wybranych, np. $p = p(v, s)$ (rugując w równaniu stanu $F(T, p, v) = 0$ ze związku $s = s(T, p)$). W wypadku samodzielnego występowania pochodnej cząstkowej konieczne jest uwidocznienie zmiennych niezależnych, od których zależy zmienna różniczkowana. Stosujemy w tym celu następujący skrótowy zapis

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \frac{\partial p(v, s)}{\partial v}.$$

a następnie rozpatrzmy przypadek $v = \text{idem}$, to otrzymamy (po podzieleniu przez dT)

$$0 = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v,$$

lub inaczej

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p = - 1. \quad (2.18)$$

Z równania (2.18) wynika następujący związek pomiędzy współczynnikami α , β i ε

$$\frac{\alpha}{\beta \varepsilon} = p. \quad (2.19)$$

2.3. Termiczne równanie stanu gazu doskonałego i półdoskonałego

Równania stanu gazów rzeczywistych nie dadzą się wyrazić prostymi funkcjami. Niektóre postacie tych równań będą podane w rozdziale 8.

W celu uproszczenia rozważań termodynamicznych dotyczących konkretnych czynników termodynamicznych stosujemy model gazu doskonałego i półdoskonałego. Gazów takich nie ma, natomiast w niektórych przypadkach gazy rzeczywiste możemy z dobrym przybliżeniem traktować jak jeden z tych gazów. Korzyść ze stosowania uproszczonych modeli gazu wynika z wyjątkowej prostoty równań opisujących ich właściwości, w tym również termicznego równania stanu.

Idealizacja gazu rzeczywistego czyniąca zeń gaz doskonały lub półdoskonały polega na pominięciu objętości własnej cząsteczek gazu oraz na pominięciu sił oddziaływania pomiędzy cząsteczkami. Cząsteczki te, zbudowane z atomów będących punktami materialnymi, są w ciągłym bezładnym ruchu, przy czym cząsteczki gazu doskonałego wykonują wyłącznie ruchy postępowe i obrotowe (cząsteczki wieloatomowe), natomiast cząsteczki gazu półdoskonałego wykonują ponadto ruchy drgające.

Objętość własna cząsteczek jest tym mniejsza, w stosunku do objętości zajmowanej przez gaz, im bardziej jest on rozrzedzony. Jed-

nocześnie wraz z rozrzedzeniem, wskutek wzrostu odległości pomiędzy cząsteczkami, maleją siły międzycząsteczkowe. Rozrzedzenie gazu jest tym większe, im mniejsza jest gęstość gazu, a ta maleje ze spadkiem ciśnienia i wzrostem temperatury. Gaz rzeczywisty można więc traktować jak gaz doskonały lub półdoskonały z tym lepszym przybliżeniem, im mniejsze jest jego ciśnienie i wyższa temperatura, w stosunku do temperatur, przy których zachodzi zmiana stanu skupienia. Kryteria te są tym ostrzejsze, im większe są cząsteczki gazu (miarą wielkości cząsteczki jest masa cząsteczkowa).

Rozróżnienie gazu doskonałego i półdoskonałego zależy od temperatury. Oscylacja atomów w cząsteczce gazu intensyfikuje się ze wzrostem temperatury, w związku z czym operowanie modelem gazu doskonałego jest możliwe dla niezbyt wysokich temperatur. Makroskopowe różnice gazu doskonałego i półdoskonałego polegają na tym, że gaz doskonały ma stałe ciepło właściwe, natomiast ciepło właściwe gazu półdoskonałego zależy od temperatury.

Gazy jednoatomowe (gazy szlachetne) najlepiej przybliżają się do modelu gazu doskonałego, jeżeli tylko ciśnienie nie jest zbyt wysokie. Nie ma potrzeby traktowania tych gazów jako gazów półdoskonałych.

Gazy dwuatomowe (azot, tlen, wodór itp.) można przy niezbyt wysokich ciśnieniach traktować jak doskonałe do temperatur ok. 100°C, a dla temperatur wyższych jak gazy półdoskonałe.

Gazy trzy- i więcej atomowe tylko w bardzo nielicznych przypadkach traktujemy jak półdoskonałe.

W szczególności parę wodną możemy traktować jak gaz półdoskonały pod niskimi ciśnieniami, niższymi od ciśnienia atmosferycznego. Gdy para wodna jest składnikiem mieszaniny gazów (np. w powietrzu) i jej ciśnienie cząstkowe jest bardzo małe, traktuje się ją nawet jak gaz doskonały.

Termiczne równanie stanu gazów doskonałych i półdoskonałych, zwane równaniem Clapeyrona, ma następującą postać

$$pv = RT \quad (2.20)$$

i można je wyprowadzić z rozważań nad zachowaniem się gazu doskonałego jako zbioru cząstek o opisanych wyżej właściwościach. Konieczne jest przy tym zdefiniowanie temperatury. Definicja ta jest inna od definicji wynikającej z zerowej zasady termodynamiki^{*)}. Równanie Clapeyrona może być uzyskane również na drodze doświadczalnej. Figurujący w równaniu Clapeyrona współczynnik R , zwany indywidualną stałą gazową, zależy od rodzaju gazu.

Jeżeli zamiast objętości właściwej posłużymy się gęstością ($\rho = 1/v$), to uzyskamy inną postać równania Clapeyrona

$$p = \rho RT. \quad (2.21)$$

Mnożąc równanie (2.20) obustronnie przez masę cząsteczkową M otrzymujemy równanie stanu, w którym parametrem termicznym jest objętość molowa (Mv).

$$p(Mv) = (MR)T. \quad (2.22)$$

Z prawa Avogadro wynika, że objętość molowa w tej samej temperaturze i pod tym samym ciśnieniem jest jednakowa dla wszystkich gazów doskonałych i półdoskonałych, a w konsekwencji stała figurująca w równaniu (2.22) musi być również jednakowa dla wszystkich gazów ($MR) = \text{const}$. Stała ta, zwana uniwersalną stałą gazową ma wartość

$$(MR) = 8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol deg}} = 848 \frac{\text{kpm}}{\text{kmol deg}}.$$

Indywidualną stałą gazową możemy więc wyznaczyć, znając masę cząsteczkową gazu, z zależności

$$R = \frac{(MR)}{M}. \quad (2.23)$$

^{*)} Wyprowadzenie to, będące częścią składową tzw. kinetycznej teorii gazów wchodzi w program kursu fizyki na I roku studiów.

W wielu zagadnieniach praktycznych nie operuje się objętością właściwą (ani też gęstością) lecz objętością V i masą m . Wygodniej wtedy posłużyć się równaniem Clapeyrona (2.20), w którym v zastąpiono przez V/m

$$pV = m R T, \quad (2.24)$$

a gdy ilość gazu jest wyrażona ilością kilomoli, równaniem

$$pV = n(MR)T \quad (2.25)$$

powstałym w analogiczny sposób z równania (2.22). Dla gazu przepływającego interesujący jest związek pomiędzy objętościowym natężeniem przepływu \dot{V} a strumieniem masy \dot{m} lub strumieniem kilomoli \dot{n} . Związki te wyrażają odpowiednio przekształcone równania (2.24) i (2.25).

$$p\dot{V} = \dot{m} R T, \quad (2.26)$$

$$p\dot{V} = \dot{n} (MR) T. \quad (2.27)$$

Termiczne równanie stanu winno być użyte tylokrotnie, ile różnych stanów czynnika występuje w danym zagadnieniu. W szczególności, gdy na podstawie znajomości objętości V_1 pewnej porcji gazu przy parametrach p_1, T_1 chcemy wyznaczyć jego objętość V_2 w innym stanie określonym parametrami p_2, T_2 , dwukrotne użycie równania (2.24) daje

$$V_2 = V_1 \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}. \quad (2.28)$$

Z równania tego możemy m.in. wyznaczyć związek pomiędzy ciśnieniem, objętością i temperaturą gazu, a ilością normalnych metrów sześciennych V_n

$$V_n = V \frac{p T_n}{p_n T}, \quad (2.29)$$

który daje się napisać w klasycznej postaci równania Clapeyrona

$$pV = V_n \frac{p T_n}{T}. \quad (2.30)$$

Iloraz parametrów normalnych p_n/T_n spełnia tu rolę stałej gazowej odniesionej do nm^3 .

Współczynnik rozszerzalności gazu doskonałego uzyskamy wstawiając do równania (2.15) równanie Clapeyrona (2.20)

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{RT}{p} \right) = \frac{1}{v} \frac{R}{p} = \frac{1}{T}$$

$$\alpha = \frac{1}{T}. \quad (2.31)$$

Podobnie oblicza się współczynnik rozprężliwości β (równ.(2.16))*

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (2.32)$$

oraz współczynnik ściśliwości (równ. (2.17))

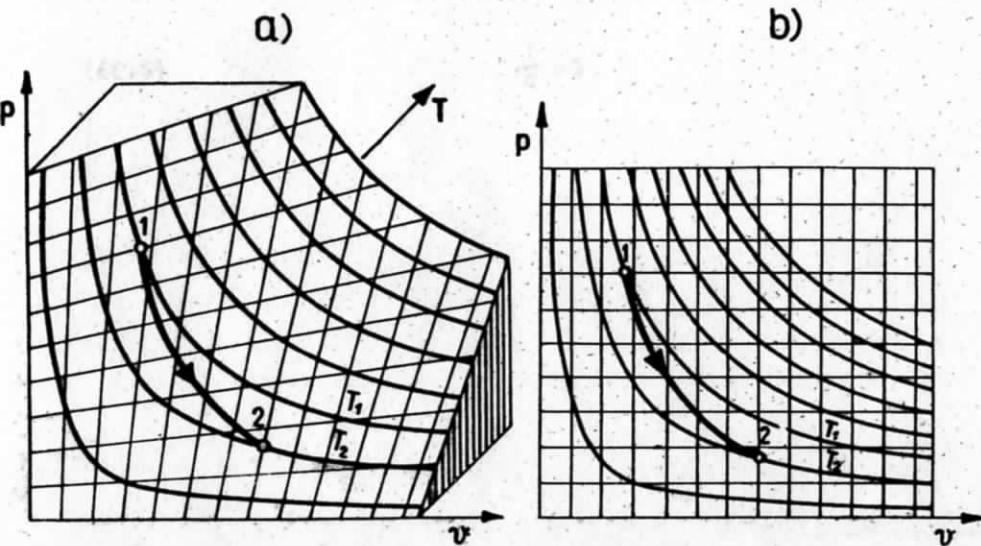
$$\epsilon = \frac{1}{p}. \quad (2.33)$$

*) Spotykane często w literaturze wartości $\alpha_0 = \frac{1}{273,15}$, $\beta_0 = \frac{1}{273,15}$ dotyczą, jak łatwo zauważyć, temperatury $t_0 = 0^\circ\text{C}$ ($T_0 = 273,15^\circ\text{K}$).

R o z d z i a ł - 3

PRZEMIANA TERMODYNAMICZNA

Rozważając pojęcie stanu termicznego czynnika stwierdziliśmy, że ten sam czynnik może przybierać różne stany, a więc może zmieniać swój stan. Jest oczywiste, że zmiana stanu nie może odbyć się skokowo, lecz że wszystkie parametry stanu muszą się zmieniać z zachowaniem ich ciągłości. W ten sposób dochodzimy do pojęcia przemiany, którą definiujemy jako zmianę stanu polegającą na przejściu układu od pewnego stanu zwanego początkowym do innego stanu (końcowego) poprzez kontinuum stanów pośrednich.



Rys. 3.1. Geometryczna interpretacja przemiany
a) na powierzchni stanu, b) na wykresie p-v

Ponieważ każdy stan czynnika odwzorowuje w przestrzeni stanu punkt, więc odwzorowaniem przemiany będzie linia ciągła łącząca punkty odpowiadające stanowi początkowemu i końcowemu (rys. 3.1). Możliwe są tylko te stany, które spełniają termiczne równanie stanu (2.14), a więc linia przemiany leży na powierzchni stanu. Sporządzając "mapę" powierzchni stanu np. we współrzędnych (p,v) - rys. 2.6b - znajdujemy na niej również płaski rzut linii przemiany. Równanie tej linii $p=f(v)$ nazywamy równaniem przemiany. Kojarząc to równanie z równaniem stanu $F(T,p,v) = 0$ możemy uzyskać podobne zależności $T=g(p)$, $T=h(v)$. W szczególności interesują nas związki parametrów początkowych i końcowych

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{f(v_1)}{f(v_2)}, \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{g(p_1)}{g(p_2)}, \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{h(v_1)}{h(v_2)}.$$

Równanie przemiany jest więc dodatkowym, obok równania stanu, równaniem "wiązków" narzuconych na parametry stanu T,p,v. Równanie to może być z góry narzucone, stanowiąc określenie przemiany (np. przy przemianie izobarycznej narzuca się stałą wartość funkcji $p=f(v)$). Poza wyznaczeniem związków pomiędzy wszystkimi parametrami interesuje nas również sposób oddziaływania na układ gwarantujący taki właśnie przebieg przemiany. W innych przypadkach znane są oddziaływania zewnętrzne, a poszukiwane jest równanie przemiany. Dla znalezienia związków pomiędzy oddziaływaniami na układ i wywołaną tym jego zmianą stanu (przemianą) musimy korzystać z dodatkowych (oprócz zerowej zasady termodynamiki i wynikającego z niej termicznego równania stanu) praw. Prawami tymi są:

- 1) prawo zachowania masy,
- 2) pierwsza zasada termodynamiki (prawo zachowania energii),
- 3) druga zasada termodynamiki.

Pierwsze dwa prawa dostarczają związków ilościowych, ostatnie zaś związków jakościowych. Z tego też względu w rozdziale niniejszym poprzestaniemy jedynie na klasyfikacji przemian. Każdy z podanych niżej podziałów przemian jest niezależny i obejmuje wszystkie przemiany.

Pierwszy podział uwzględnia zachowanie się masy czynnika podlegającego przemianom:

1. Przemiany zamknięte - gdy podczas przemiany nie ma dopływów i odpływów masy z układu. Wynika stąd stałość masy układu, ale nie odwrotnie.
2. Przemiany otwarte - podczas tych przemian układ pobiera lub oddaje na zewnątrz masę.

Z uwagi na przebieg ciśnienia w układzie przemiany dzielimy na:

1. Przemiany sprężania, podczas których ciśnienie rośnie ($dp > 0$).
2. Przemiany rozprężania, podczas których ciśnienie maleje ($dp < 0$).
3. Przemiana izobaryczna, podczas której ciśnienie jest stałe ($dp = 0$).

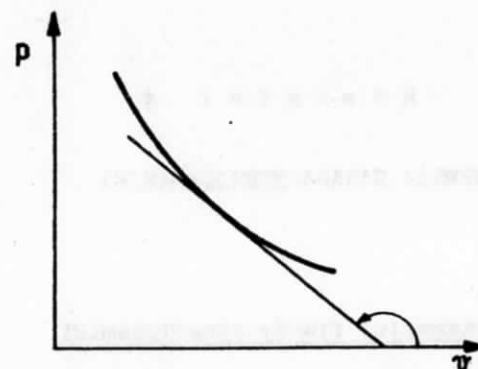
Jeżeli jako kryterium przyjmujemy charakter zmienności objętości właściwej, to otrzymamy następujący podział:

- 1) przemiany kompresji, podczas których objętość właściwa maleje ($dv < 0$),
- 2) przemiany ekspansji, podczas których objętość właściwa rośnie ($dv > 0$),
- 3) przemiana izochoryczna, podczas której objętość właściwa jest stała ($dv = 0$).

Dla większości przemian spotykanych w praktyce zachodzi nierówność

$$\frac{dp}{dv} < 0,$$

co odpowiada przebiegowi przedstawionemu na rys. 3.2. Dla przemian tych sprężanie pokrywa się z kompresją (stąd synonimy: sprężarka = kompresor), a rozprężanie z ekspansją. Przykładem przemiany, podczas której jednocześnie rośnie ciśnienie i objętość właściwa może być podgrzewanie gazu w zamkniętym zbiorniku o elastycznych ściankach.



Rys. 3.2. Charakter przebiegu większości przemian

Kolejny podział jest podziałem w cudzoślówiu. Polega on na dodaniu do grupy rzeczywiście zachodzących przemian, będących przemianami nieodwracalnymi, dwu grup przemian: odwracalnych i pseudoodwracalnych. Przemianą odwracalną nazywamy przemianę, którą można odwrócić (przywracając układowi, w którym przebiega przemiana stan początkowy) bez pozostawienia trwałych zmian w otoczeniu układu. Przemiana pseudoodwracalna jest to przemiana, której jedynym źródłem nieodwracalności jest nieodwracalny transport ciepła pomiędzy układem i źródłem ciepła. Przemiany odwracalne i pseudoodwracalne nie istnieją w ogóle, mogą być jednak zrealizowane przemiany dowolnie mało różniące się od nich. Jednym z powodów stosowania takich przemian modelowych jest prostota opisujących je równań. Nie jest to jednak powód najważniejszy. Przemiany te są przemianami najkorzystniejszym z punktu widzenia efektów energetycznych i dlatego są podstawą do oceny jakości rzeczywistych przemian nieodwracalnych. Zagadnienia te będą obszerniej wyjaśnione przy okazji omawiania drugiej zasady termodynamiki.

R o z d z i a ł 4

PIERWSZA ZASADA TERMODYNAMIKI

4.1. Sformułowanie pierwszej zasady termodynamiki

Pierwsza zasada termodynamiki jest zasadą zachowania energii rozszerzoną na wszystkie formy energii, łącznie z energią cieplną. Jej historyczne sformułowanie dotyczyło równoważności ciepła i pracy (przed sformułowaniem tej zasady ciepło uważano za odrębne zjawisko fizyczne, jakiś fluid mogący być przekazywany między ciałami o różnych temperaturach). Dziś to historyczne sformułowanie wydaje się naiwne.

W myśl pierwszej zasady termodynamiki energia układu odosobnionego (całkowicie odciętego od wpływów otoczenia) nie zmienia się, mimo zachodzących w jego wnętrzu przemian. Jeśli jest to np. przemiana 1-2, to stwierdzeniu temu odpowiada równanie

$$E_{u2} = E_{u1}, \quad (4.1)$$

które można przedstawić w postaci warunku zerowania się przyrostu energii układu

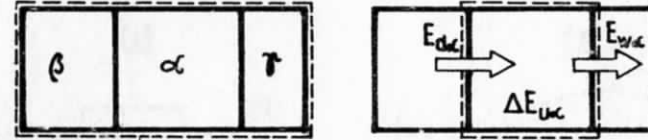
$$\Delta E_u = E_{u2} - E_{u1} = 0. \quad (4.2)$$

Jeżeli układ odosobniony podzielimy na trzy podukłady (rys. 4.1) α , β i γ , to w każdym z nich energia może się zmieniać, byle w całości pozostawała niezmienną

$$E_{u\alpha 2} + E_{u\beta 2} + E_{u\gamma 2} = E_{u\alpha 1} + E_{u\beta 1} + E_{u\gamma 1}. \quad (a)$$

Po przegrupowaniu wyrazów otrzymujemy

$$E_{u\beta 1} - E_{u\beta 2} = E_{u\alpha 2} - E_{u\alpha 1} + E_{u\gamma 2} - E_{u\gamma 1}. \quad (b)$$



Rys. 4.1. Układ złożony

Wyrażenie $E_{u\beta 1} - E_{u\beta 2}$ jest ubytkiem energii podukładu β i równa się energii dostarczonej do podukładu α

$$E_{u\beta 1} - E_{u\beta 2} = E_{d\alpha} \quad (c)$$

Podobnie wyrażenie $E_{u\gamma 2} - E_{u\gamma 1}$ jest przyrostem energii podukładu γ i równa się energii wyprowadzonej z podukładu α

$$E_{u\gamma 2} - E_{u\gamma 1} = E_{w\alpha} \quad (d)$$

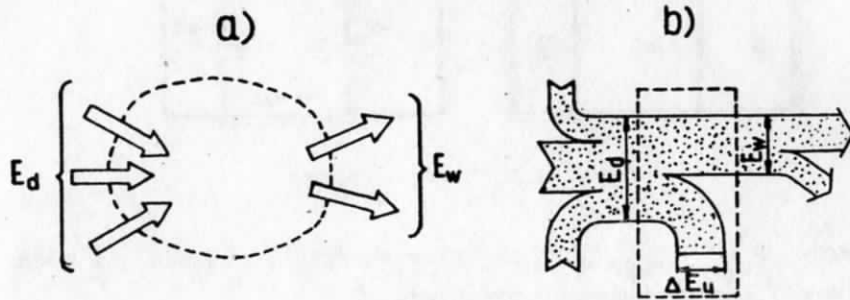
Wstawiając równania (c) i (d) do równania (4.2) i uwzględniając zapis (4.2) otrzymujemy równanie bilansu energii dla podukładu α

$$E_{d\alpha} = \Delta E_{u\alpha} + E_{w\alpha}$$

Podukład α jest układem dowolnym (nieodosobnionym). Opuszczając indeks α uzyskujemy równanie pierwszej zasady termodynamiki dla układu dowolnego

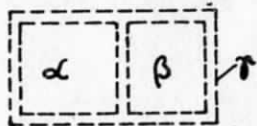
$$E_d = \Delta E_u + E_w \quad (4.3)$$

W ogólnym przypadku E_d oznacza sumę energii dostarczonych do układu, zaś E_w sumę energii wyprowadzonych (rys. 4.2a). Bardzo często równanie bilansu (4.3) ilustrujemy wykresem pasmowym (rys. 4.2b), na którym szerokości pasm są proporcjonalne do wartości poszczególnych pozycji bilansu. Wykres ten nosi nazwę wykresu Sankey'a.



Rys. 4.2. Bilans układu dowolnego

By równanie bilansu energii (4.3) przybrało konkretną postać i spełniło cel użyteczny, należy wyraźnie sprecyzować bilansowany obiekt. Pierwszą czynnością, która na to się składa jest określenie bilansowanego układu. Granice tego układu wytyczamy za pomocą myślowej osłony kontrolnej. Sposób prowadzenia tej osłony jest dowolny i zależy od celu, jaki chcemy uzyskać z zastosowania równania bilansu energii. Osłona kontrolna musi być powierzchnią (a dla układów płaskich - linią) zamkniętą, może natomiast w czasie trwania zjawiska rozszerzać się lub kurczyć, a także może się poruszać w przestrzeni. Łatwo wykazać, że równanie bilansu układu złożonego z dwóch podukładów



Rys. 4.3. Bilans układu złożonego

stykających się (rys. 4.3) jest sumą równań bilansowych podukładów *)

$$E_{d\alpha} = \Delta E_{u\alpha} + E_{w\alpha} \quad (\alpha)$$

$$E_{d\beta} = \Delta E_{u\beta} + E_{w\beta} \quad (\beta)$$

$$E_{d\gamma} = \Delta E_{u\gamma} + E_{w\gamma} \quad (\gamma)$$

$$(\gamma) = (\alpha) + (\beta).$$

$$dE_d = dE_u + dE_w$$

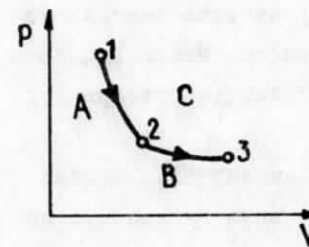
$$\int_V dE_d = \int_V dE_u + \int_V dE_w$$

Rys. 4.4. Bilans różniczkowy i całkowy w przestrzeni

Oczywiste jest, że twierdzenie to można uogólnić na dowolną ilość podukładów. W szczególności w wyniku całkowania równania bilansu nieskończenie małej części układu (bilans różniczkowy) uzyskujemy równanie bilansu całego układu (rys.4.4).

Po wytyczeniu bilansowanego układu musimy sprecyzować zachodzącą w tym układzie przemianę, której ma dotyczyć bilans.

Polega to na określeniu stanu początkowego 1 i stanu końcowego 2 przemiany. Tu również obowiązuje zasada addytywności równań bilansowych.



Rys. 4.5. Przemiana złożona

Równanie bilansu przemiany złożonej z dwóch następujących po sobie przemian (rys. 4.5) jest sumą równań każdej z tych przemian

$$E_{c1-2} = E_{u2} - E_{u1} + E_{w1-2} \quad (A)$$

*) przez sumę równań rozumiemy równanie powstałe ze zsumowania lewych i prawych stron równań składowych.

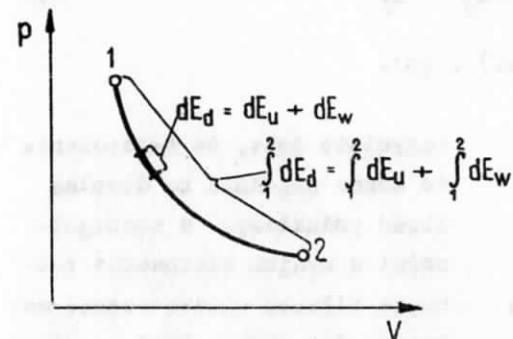
$$E_{d2-3} = E_{u3} - E_{u2} + E_{w2-3}, \quad (B)$$

$$E_{d1-3} = E_{u3} - E_{u1} + E_{w1-3}. \quad (C)$$

$$(C) = (A) + (B).$$

I znów stwierdzenie to można uogólnić na dowolną ilość następujących po sobie przemian. W szczególności w wyniku całkowania równania bilansu przemiany elementarnej uzyskujemy równanie bilansu całej przemiany (rys. 4.6).

Mając określony układ i przemianę możemy bardziej szczegółowo zinterpretować poszczególne pozycje



Rys. 4.6. Różniczkowy i całkowany bilans przemiany

z równania bilansu energii (4.3). Przyrost energii układu ΔE_u jest różnicą energii układu (zawartości osłony kontrolnej) w stanie końcowym 2 i w stanie początkowym 1. E_d jest sumą energii dostarczonych do układu (przepływających przez osłonę kontrolną do jej wnętrza) w czasie trwania przemiany 1-2. Podobnie interpretuje się sumę energii wyprowadzonych E_w .

Równanie bilansu energii (4.3) w postaci całkowanej (dla całego układu i całej przemiany) jest warunkiem koniecznym narzuconym na przemianę przez zasadę zachowania energii. Nie jest to jednak warunek wystarczający, gdyż lokalnie (w poszczególnych częściach układu i na poszczególnych odcinkach przemiany) mogłyby wystąpić wzajemnie się kompensujące odchyłki od tej zasady.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym z punktu widzenia zasady zachowania energii jest równanie bilansu różniczkowego

$$dE_d = dE_u + dE_w \quad (4.4)$$

sporządzone dla elementarnego podukładu (rys. 4.4) i elementarnej wycinka przemiany (rys. 4.6). Jeśli układ jest jednorodny, to oczywiście wystarczy zróżniczkować tylko przemianę. Stosowanie bilansu różniczkowego jest również w wielu przypadkach konieczne dla uzyskania pełnej informacji o procesie. Konieczność taka występuje zawsze przy opisywaniu zjawisk niestabilnych, gdy chcemy wyznaczyć przebiegi czasowe parametrów opisujących stan układu.

W zagadnieniach technicznych przebieg przemiany wiążemy zwykle z czasem. Dzieląc równanie (4.4) przez różniczkę czasu uzyskujemy równanie

$$\frac{dE_d}{dT} = \frac{dE_w}{dT} + \frac{dE_u}{dT},$$

które można również zapisać następująco:

$$\dot{E}_d = \frac{dE_u}{dT} + \dot{E}_w \quad (4.5)$$

zgodnie z umową o oznaczeniach wielkości mających charakter strumieni (rozdz. 1.5). Symbole \dot{E}_d i \dot{E}_w oznaczają odpowiednio sumę strumieni energii dostarczanej do układu i wyprowadzanej z układu, natomiast dE_u/dT jest szybkością zmiany energii układu.

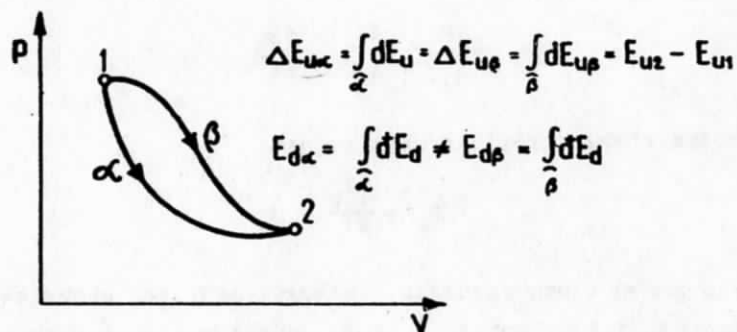
W zagadnieniach praktycznych bardzo często bilansujemy układy, w których zachodzą zjawiska ciągłe i ustalone. Ustaloność polega na niezmienności w czasie strumieni dopływających i wypływających energii, jak również parametrów układu. Energia układu jest także niezmienna (akumulacja energii przeczyłaby zasadzie ustaloności). Pociąga to za sobą zerowanie się pochodnej dE_u/dT , dzięki czemu równanie bilansu energii upraszcza się do postaci

$$\dot{E}_d = \dot{E}_w \quad (4.6)$$

W stanie ustalonym więc suma strumieni energii dostarczanych do układu jest równa sumie strumieni energii wyprowadzonych z układu.

4.2. Energia układu

Energia układu jest funkcją stanu układu, przy czym stan układu w ogólnym pojęciu opisują nie tylko termiczne parametry stanu, ale i inne parametry: prędkość ruchu, położenie w polu sił grawitacyjnych. Z faktu, że energia układu jest funkcją stanu układu wynika, że przyrost energii układu zależy wyłącznie od zmiany stanu układu, nie zależy natomiast od rodzaju przemiany (rys. 4.7).



Rys. 4.7. Przyrost energii układu i energia dostarczona do układu

Matematyczną konsekwencją tego faktu jest to, że różniczka energii układu jest różniczką zupełną. Całka różniczki zupełnej, jak wiadomo, nie zależy od drogi całkowania, a jedynie od punktu początkowego i końcowego tej drogi.

Drugą ważną właściwością energii jest jej addytywność. Z właściwości tej wynika z jednej strony fakt sumowania się energii układu złożonego z podukładów

$$E_u = \sum_i E_{ui} \quad (4.7)$$

z drugiej zaś strony, dla układu jednorodnego, sumowanie się różnych form energii. W naszych rozważaniach będziemy uwzględniać następujące formy energii:

- energię wewnętrzną U ,
- energię kinetyczną

$$E_k = \frac{1}{2} m w^2, \quad (4.8)$$

- energię potencjalną

$$E_p = m g h, \quad (4.9)$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie, zaś h wysokość ponad przyjęty poziom odniesienia. Dla gazów nie więcej niż 3-atomowych przy dokładności obliczeń rzędu 1%, energię kinetyczną uwzględnia się dla prędkości $w > 40$ m/s, a energię potencjalną dla różnic wysokości przekraczających 100 m.

Energję układu wyraża się więc równaniem

$$E_u = U + E_k + E_p. \quad (4.10)$$

Energja wewnętrzna jest tą częścią energii układu, która zależy od jego stanu termicznego^{*)}. Z addytywności energii wynika, że energja wewnętrzna jest wielkością ekstensywną (proporcjonalną do masy)

$$U = m u, \quad (4.11)$$

przy czym zależność od stanu termicznego uwzględnia energja wewnętrzna właściwa u

$$u = u(T, p). \quad (4.12)$$

^{*)} W mowie potocznej a niekiedy w języku technicznym używanym przez nietermodynamików energję wewnętrzną nazywa się ciepłem, używając tego określenia jeszcze dla dwu innych wielkości fizycznych. Właściwe znaczenie rzeczownika "ciepło" w termodynamice podano w rozdz. 4.3.3.

Z punktu widzenia drobinowej struktury gazu energia wewnętrzna jest sumą energii kinetycznych bezładnego ruchu cząsteczek (energia kinetyczna uporządkowanego ruchu makroskopowego uwzględniana jest oddzielnie - równ. (4.8)) oraz energii potencjalnych wzajemnego położenia cząsteczek. Dla gazów doskonałych w grę wchodzi tylko pierwszy czynnik, dlatego ich energia wewnętrzna zależy tylko od temperatury. Gdy rozpatrujemy zjawiska, w których uczestniczą reakcje chemiczne, w energii wewnętrznej należy dodatkowo uwzględnić tzw. energię chemiczną wynikającą z energii wiązań atomów w drobinie.

Ponieważ energia wewnętrzna jest funkcją stanu układu, jej różniczka jest różniczką zupełną

$$dU = d(m u) = m du + u dm. \quad (4.13)$$

Drugi składnik zeruje się jedynie dla przemian zamkniętych ($dm = 0$). Zupełna jest również różniczka energii wewnętrznej właściwej

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T dp. \quad (4.14)$$

Korzystając z termicznego równania stanu (podstawiając w równ. (4.12) $p=p(T,v)$) możemy energię wewnętrzną właściwą wyrazić jako funkcję temperatury i objętości właściwej

$$u = u(T, v)$$

i w analogiczny sposób zapisać jej różniczkę zupełną.

Uwzględniając zależności (4.8), (4.9) i (4.11) możemy równanie (4.10) przedstawić w następującej postaci

$$E_u = m\left(u + \frac{w^2}{2} + g h\right). \quad (4.15)$$

Sposób obliczania energii wewnętrznej właściwej będzie podany w rozdziale 4.5.

4.3. Sposoby dostarczania i wyprowadzania energii z układu

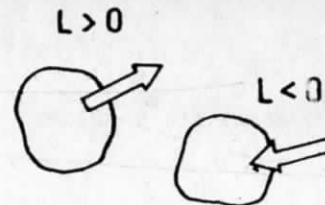
W rozdziale tym omówimy szczegółowo pozycje równań pierwszej zasady termodynamiki oznaczone symbolami E_d , E_w , \dot{E}_d , \dot{E}_w . Wspólną i bardzo istotną cechą tych wielkości jest to, iż nie są one funkcjami stanu bilansowanego układu. Ich różniczki nie są w związku z tym różniczkami zupełnymi, a jedynie wyrażeniami różniczkowymi (tzw. wyrażenia Pfaffa). Niekiedy te wyrażenia różniczkowe, dla podkreślenia ich odrębności od różniczki zupełnej, oznacza się symbolem dE_w , dE_d . W niniejszym podręczniku symbolika ta będzie stosowana wyjątkowo, gdy podkreślenie tej odrębności będzie szczególnie istotne.

Całka różniczki niezupełnej (wyrażenia różniczkowego) zależy nie tylko od granic, ale również od drogi całkowania, a zatem energie dostarczone i wyprowadzone zależą nie tylko od zmiany stanu układu, ale również od rodzaju przemiany (rys. 4.7).

4.3.1. Praca

Praca nie jest energią, lecz jedynie sposobem przekazywania energii. Pojęcie pracy ma sens tylko wtedy, gdy praca ta jest aktualnie wykonywana. Podnosząc ciężarek wykonujemy pracę, po zakończeniu tej czynności pracy już nie ma, jest tylko odpowiednio zwiększona energia potencjalna ciężarka.

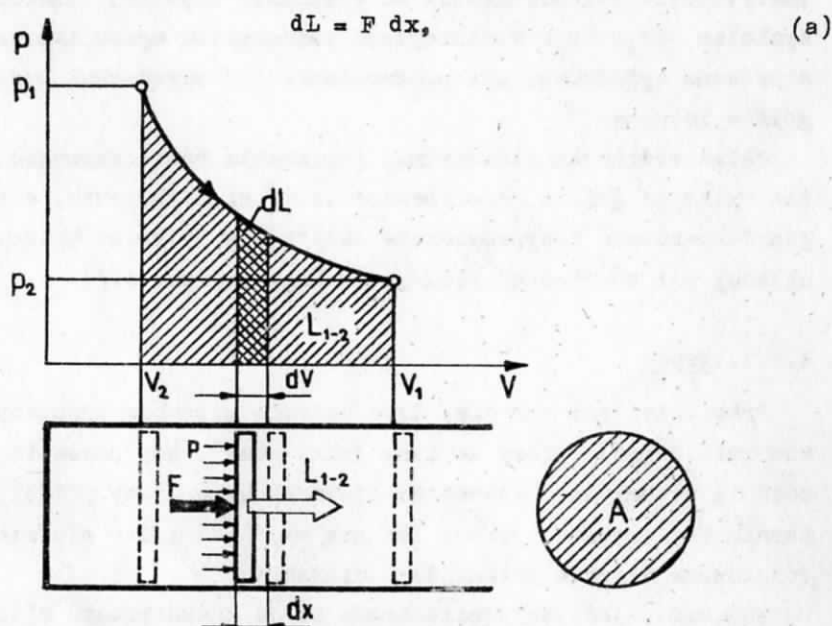
Konieczne jest przyjęcie umowy co do znaku pracy. W termodynamice technicznej przyjmuje się jako dodatnią pracę wykonywaną przez układ, natomiast pracę wkładaną do układu jako ujemną (rys. 4.8).



Rys. 4.8. Znak pracy

Pracą bezwzględną przemiany 1-2 nazywamy pracę faktycznie wykonaną przez gaz w czasie tej przemiany. Określenie to, jak i użyty dla pracy przymiotnik są potrzebne z uwagi na to, że do pracy bezwzględnej przemiany 1-2 dodają się niekiedy inne prace bezwzględne i sumy te odnosimy znów do przemiany 1-2.

Wielkość wykonywanej pracy zależy od zmiany stanu układu i od rodzaju przemiany, nie zależy natomiast od geometrii układu. Dla tego też rozważania dotyczące pracy przeprowadzimy na układzie wykonanym w kształcie cylindra zamkniętego tłokiem, w którym przebiega przemiana (rys. 4.9). Jeśli pominąć zjawiska tarcia wewnętrzne w gazie, to pracę elementarnego odcinka przemiany można obliczyć z definicji pracy



Rys. 4.9. Model układu wykonującego pracę

przy czym siła F pochodzi od ciśnienia i wyraża się wzorem

$$F = p A, \quad (b)$$

gdzie A jest powierzchnią tłoka. Łącząc równania (a) i (b) po uwzględnieniu, że $A dx = dV$ otrzymujemy

$$dL = p dV, \quad (4.16)$$

a po scałkowaniu

$$L_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (4.17)$$

Równanie (4.17) potwierdza tezę o zależności pracy nie tylko od zmiany stanu układu, ale również od rodzaju przemiany - dla wyznaczenia pracy konieczna jest znajomość równania przemiany $p = p(V)$. Graficzną interpretacją pracy bezwzględnej jest pole zawarte między linią przemiany i osią V (rys. 4.9). W wypadku, gdy występuje tarcie wewnętrzne w gazie praca wykonana na tłoku jest mniejsza o pracę zużytą wewnątrz układu na pokonanie oporów tarcia, zwaną **pracą tarcia** L_f

$$dL = p dV - dL_f, \quad (4.18)$$

$$L_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV - L_{f1-2}. \quad (4.19)$$

Należy podkreślić, że równania (4.16) - (4.19) stosują się zarówno do układów zamkniętych jak i otwartych (podczas przemiany do układu może dopływać lub wypływać masa).

Praca użyteczna przemiany 1-2 jest różnicą pracy bezwzględnej tej przemiany L_{1-2} i równocześnie wykonanej pracy bezwzględnej kompresji otoczenia znajdującego się zewnątrz układu wykonującego pracę

$$L_{u1-2} = L_{1-2} - L_{ot}. \quad (4.20)$$

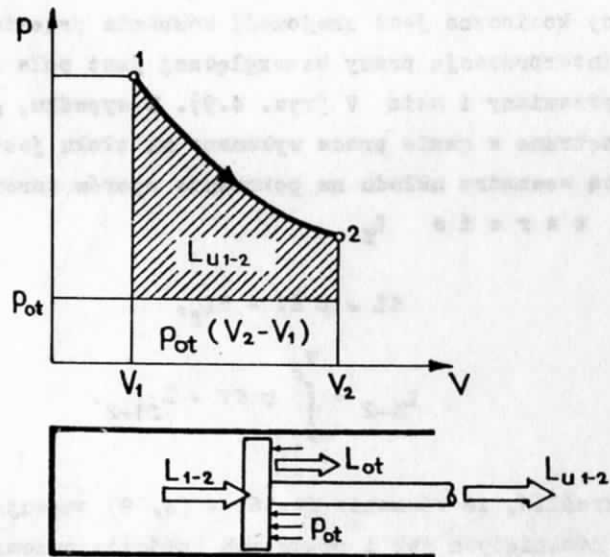
Jest to więc ta część pracy wykonanej przez gaz, która może być użytecznie wykorzystana. Ponieważ ciśnienie otoczenia jest stałe, więc praca kompresji otoczenia jest równa

$$L_{ot} = \int_{V_1}^{V_2} dL_{ot} = \int_{V_1}^{V_2} p_{ot} dV = p_{ot}(V_2 - V_1),$$

ostatecznie więc

$$L_{u1-2} = L_{1-2} - p_{ot}(V_2 - V_1). \quad (4.21)$$

Interpretację graficzną pracy użytecznej przedstawiono na rysunku 4.10.

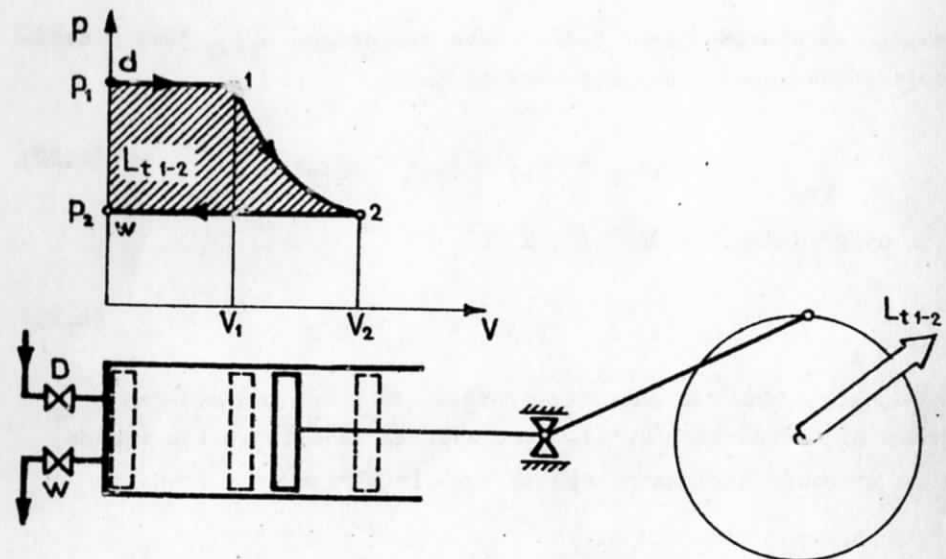


Rys. 4.10. Praca użyteczna

Pracą techniczną przemiany 1-2 nazywamy sumę prac bezwzględnych uzyskiwanych w maszynie przepływowej, w której jest realizowana przemiana 1-2. W maszynie przepływowej możemy w sposób powtarzalny lub nawet ciągły uzyskiwać pracę kosztem rozprężenia gazu (przemiana 1-2), musimy jednak, dla zapewnienia tej powtarzalności lub ciągłości, zasilać maszynę świeżym gazem i odprowadzać gaz rozprężony. Te dwa dodatkowe procesy są również związane z pewnymi pracami. Prace te dodajemy do pracy przemiany rozprężenia 1-2 i sumę tę nazywamy pracą techniczną przemiany. Powtarzalną (cykliczną) przemianę rozprężenia realizujemy w maszynie

przepływowej tłokowej (np. tłokowa maszyna parowa), zaś ciągłą przemianę realizujemy w maszynie wirnikowej (np. turbina parowa). Podobnie odwrotna przemiana sprężania może odbywać się periodycznie w sprężarce tłokowej lub w sposób ciągły w sprężarce wirnikowej.

Wartość pracy technicznej nie zależy od typu maszyny przepływowej i dlatego pracę tę omówimy szczegółowo na przykładzie tzw. idealnej maszyny tłokowej (rys. 4.11). Idealna maszyna tłokowa charakteryzuje się tym, że najmniejsza objętość cylindra (w wewnętrznym skrajnym położeniu tłoka) jest równa 0. W rzeczywistej maszynie tłokowej tłok nie dotyka w tym skrajnym położeniu dna cylindra i pozostaje pod tłokiem pewna objętość, zwana objętością szkodliwą.



Rys. 4.11. Idealna maszyna przepływowa tłokowa

Zacznijmy analizować działanie maszyny tłokowej od chwili gdy tłok znajduje się w wewnętrznym skrajnym położeniu. Dla zrealizowania przemiany 1-2 należy cylinder maszyny napełnić objętością

V_1 świeżego gazu. W tym celu otwieramy zawór dolotowy D i gaz napływa do maszyny wykonując przy tym pracę bezwzględną

$$L_{d-1} = \int_0^{V_1} p_1 dV = p_1 \int_0^{V_1} dV = p_1 V_1 \quad (c)$$

zwaną pracą napełniania. W punkcie 1 rozpoczyna się, przy zamkniętych obu zaworach, właściwa przemiana 1-2, podczas której jest wykonywana praca bezwzględna L_{1-2} . W punkcie 2 otwiera się zawór wylotowy W i przy powrotnym ruchu tłoka odbywa się przemiana opróżniania cylindra ze zużytego gazu. Praca bezwzględna tej przemiany

$$L_{2-w} = \int_{V_2}^0 p_2 dV = p_2 \int_{V_2}^0 dV = -p_2 V_2 \quad (d)$$

jest pracą włożoną (znak "-"). Praca techniczna L_{t1-2} jest z definicji równa sumie tych prac bezwzględnych

$$L_{t1-2} = L_{1-2} + L_{d-1} + L_{2-w} \quad (4.22)$$

a po uwzględnieniu równań (c) i (d)

$$L_{t1-2} = L_{1-2} + p_1 V_1 - p_2 V_2 \quad (4.23)$$

Jeżeli przemiana 1-2 jest beztarciowa, to praca bezwzględna L_{1-2} wyraża się równaniem (4.17). Wykonując na zawartej w tym wzorze całkę operację całkowania "przez części" otrzymujemy równanie

$$L_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = pV \Big|_{p_1 V_1}^{p_2 V_2} - \int_{p_1}^{p_2} V dp = p_2 V_2 - p_1 V_1 - \int_{p_1}^{p_2} V dp,$$

które możemy zapisać następująco

$$- \int_{p_1}^{p_2} V dp = L_{1-2} + p_1 V_1 - p_2 V_2 \quad (4.24)$$

Porównując równanie (4.23) i (4.24) dochodzimy do wzoru na obliczenie pracy technicznej dla przemian beztarciowych

$$L_{t1-2} = - \int_{p_1}^{p_2} V dp \quad (4.25)$$

Różniczka pracy technicznej

$$dL_t = -V dp \quad (4.26)$$

ma w maszynie tłokowej sens czysto formalny (sens fizyczny miałaby wtedy, gdyby zamiast jednej maszyny zastosować nieskończenie wiele szeregowo połączonych maszyn tłokowych, z których każda realizowałaby nieskończenie małą część przemiany 1-2).

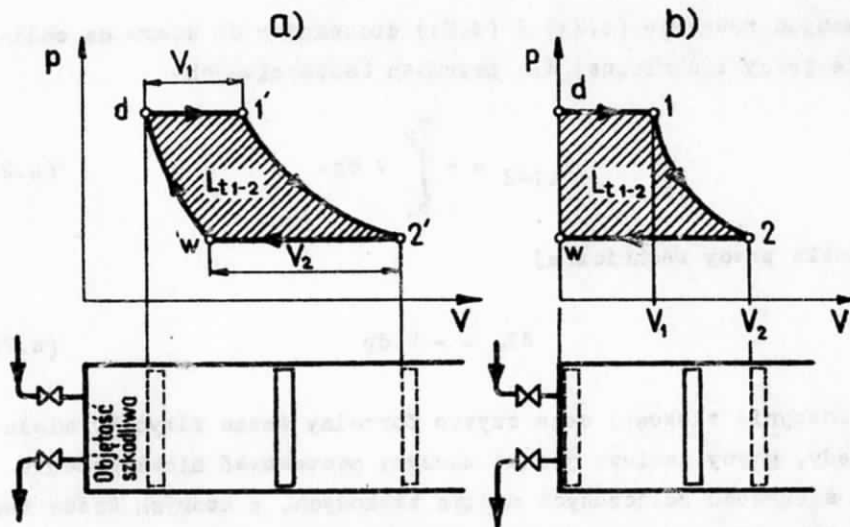
Równanie (4.26) można również uzyskać z graficznej interpretacji pracy technicznej. Przedstawiając składowe prace bezwzględne pracy technicznej (równ. (4.22)) jako pola pod odpowiednimi liniami przemian i wykonując odpowiednie dodawanie tych pól otrzymujemy dla pracy technicznej pole zawarte między linią przemiany i osią ciśnień (rys. 4.11). Miarą tego pola jest całka (4.25).

W maszynie tłokowej rzeczywistej (rys. 4.12) wskutek istnienia objętości szkodliwej, po przemianie opróżniania (po wytłoczeniu z cylindra tej samej co w maszynie idealnej objętości V_2 rozprężonego gazu) należy przy zamkniętych obu zaworach sprężyc pozostałą resztę gazu do ciśnienia p_1 panującego w rurociągu dolotowym. Włożona praca bezwzględna tej przemiany L_{w-d} jest odzyskana podczas przemiany rozprężania $1'-2'$.

$$L_{1'-2'} = L_{1-2} + L_{w-d} \quad (e)$$

We wzorze tym L_{1-2} jest pracą jaką wykonała porcja zassanego gazu o objętości początkowej V_1 (rys. 4.12b). Praca uzyskana w maszynie tłokowej rzeczywistej równa się sumie prac bezwzględnych przemian składowych

$$L = L_{1'-2'} + L_{d-1}' - L_{2'-w} - L_{w-d} \quad (f)$$



Rys. 4.12. Rzeczywista maszyna tłokowa (a) i porównawcza maszyna idealna

Uwzględniając, że

$$L_{d-1}' = p_1 V_1'$$

$$L_{2'-w} = -p_2 V_2$$

oraz biorąc pod uwagę równanie (e), otrzymujemy

$$L = L_{1-2} + L_{w-d} + p_1 V_1' - p_2 V_2 - L_{w-d} = L_{t1-2}'$$

Praca uzyskana w rzeczywistej maszynie tłokowej jest więc również tą samą pracą techniczną tylko odniesioną do przemiany 1-2 jaką realizuje porcja zassanego gazu. Praca ta równa się polu zawartemu wewnątrz linii przemianowych, z których jest złożony cykl pracy maszyny.

W przypadku, gdy w czasie przemiany zachodzącej w maszynie przepływowej występuje wewnętrzne tarcie, uzyskujemy pracę mniejszą niż to wynika ze wzoru (4.25), o pracę tarcia L_{f1-2}

$$L_{t1-2} = - \int_{p_1}^{p_2} v dp - L_{f1-2} \quad (4.27)$$

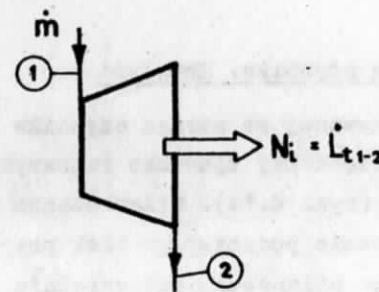
lub w zapisie różniczkowym

$$dL_t = -v dp - dL_f \quad (4.28)$$

Jeżeli pracę techniczną uzyskaną w jednym cyklu maszyny tłokowej L_{t1-2} pomnożymy przez częstość cykli \dot{n}_0 , otrzymamy pracę wykonywaną przez gaz w jednostce czasu, zwaną mocą wewnętrzną maszyny

$$N_1 = \dot{n}_0 L_{t1-2} \quad (4.29)$$

W maszynie przepływowej wirnikowej (rys. 4.13) rozprężanie czynnika odbywa się nie porcjami, jak w maszynie tłokowej, lecz w sposób ciągły. Przez maszynę przepływa strumień masy czynnika \dot{m} .



Rys. 4.13. Symboliczne przedstawienie maszyny przepływowej wirnikowej

Na dopływie czynnik posiada ciśnienie p_1 , objętościowe natężenie przepływu wynosi \dot{V}_1 i analogicznie na wypływie p_2 i \dot{V}_2 . Czynnik rozpręża się podczas przepływu przez maszynę wykonując przy tym pracę. Moc wewnętrzna maszyny równa się strumieniowi pracy technicznej przemiany rozprężania 1-2

$$N_1 = \dot{L}_{t1-2} = - \int_{p_1}^{p_2} \dot{V} dp \quad (4.29)$$

Ponieważ

$$\dot{V} = \dot{m} v,$$

więc

$$N_1 = - \dot{m} \int_{p_1}^{p_2} v dp. \quad (4.30)$$

Moc uzyskiwana na sprzęgle maszyny, zwana mocą efektywną N_e , jest mniejsza od mocy wewnętrznej o straty mocy na tarcie w mechanizmach maszyny (tarcie to odbywa się już poza przemianą rozprężania i nie należy go mieszać z tarcem wewnętrznym (równ. (4.27)). Stosunek tych dwóch mocy

$$\eta_m = \frac{N_e}{N_1} \quad (4.31)$$

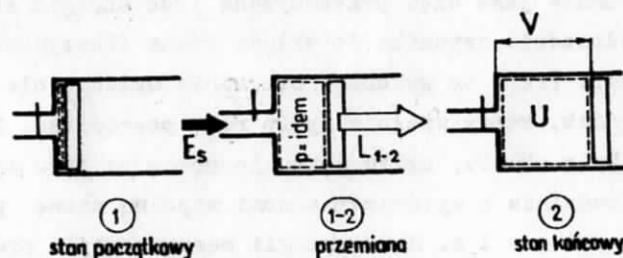
nazywany jest sprawnością mechaniczną maszyny przepływowej.

Opisane wyżej procesy zachodzące w maszynie przepływowej dotyczą przypadku rozprężania gazu. Odwracając te procesy otrzymujemy sprężarkę. Praca włożona na sprężenie gazu jest równa ujemnej pracy technicznej.

4.3.2. Energia przekazywana ze strugą czynnika. Entalpia

W celu wyznaczenia energii przekazywanej ze strugą czynnika przez granicę bilansowanego układu rozpatrzmy zjawisko izobarycznego napełniania cylindra czynnikiem (rys. 4.14). Bilansowanym układem jest zawartość cylindra. W stanie początkowym tłok przylega do dna cylindra, kontrolna osłona bilansowa jest zupełnie spłaszczona, układ niczego nie zawiera, jego energia

$$E_{u1} = 0. \quad (a)$$



Rys. 4.14. Model do wyznaczania energii przekazywanej ze strugą czynnika

Podczas przemiany napełniania, odbywającej się dostatecznie powoli, do cylindra napływa czynnik przy stałym ciśnieniu p . Energia dostarczona równa się energii E_s przekazanej ze strugą czynnika

$$E_d = E_s, \quad (b)$$

energia zaś wyprowadzona podczas przemiany 1-2 jest równa pracy wykonanej na tłoku (pracy napełniania)

$$E_w = L_{1-2} = pV, \quad (c)$$

gdzie V jest końcową objętością układu równą objętości czynnika, który napłynął do układu. Podczas tej przemiany napełniania czynnik nie podlega żadnej zmianie stanu, końcowa energia układu jest więc równa energii wewnętrznej czynnika U

$$E_{u2} = U. \quad (d)$$

Podstawiając równania (a)-(d) do równania pierwszej zasady termodynamiki (4.3) otrzymujemy

$$E_s = U - 0 + pV = U + pV. \quad (4.32)$$

Ze strugą czynnika jest więc przekazywana jego energia wewnętrzna U i praca wtłoczenia czynnika do układu równa iloczynowi ciśnienia i objętości. Pracę tę wykonuje otoczenie układu, nie zaś sam wtłaczany czynnik, który spełnia tylko rolę pośrednika. Przy wypływie czynnika z układu, układ wykonuje pracę na jego wytlóczenie. Praca wtłaczania i wytłaczania nosi wspólną nazwę *pracy przetłaczania*. Sumę energii wewnętrznej i pracy przetłaczania nazywamy *entalpią*

$$I = U + pV. \quad (4.33)$$

Bardzo często entalpię nazywa się energią strugi. Należy pamiętać, że jest to tylko skrót myślowy. Czynnik ma zawsze energię równą energii wewnętrznej bez względu na to, czy znajduje się w układzie, czy też przepływa przez granicę układu. W tym drugim przypadku wnosi on ze sobą dodatkowo pracę przetłaczania, którą dla wygody rachunkowej dodajemy do energii wewnętrznej i tworzymy z tej sumy jedną wielkość zwaną entalpią.

Ponieważ energia wewnętrzna U i objętość V są wielkościami ekstensywnymi, więc również entalpia jest wielkością ekstensywną

$$I = U + pV = mu + p mv = n(u + pv) = m i. \quad (4.34)$$

Równanie określające *entalpię właściwą*

$$i = u + pv \quad (4.35)$$

nosi nazwę równania Gibbsa.

W przytoczonym wyżej rozumowaniu, mającym na celu wyprowadzenie pojęcia entalpii, przyjęliśmy bardzo powolny przepływ czynnika. Jak widać z rysunku 4.14 czynnik nie zmieniał też swej wysokości. W ogólnym przypadku do entalpii należy dodać energię kinetyczną i potencjalną

$$E_s = I + E_k + E_p, \quad (4.36)$$

przy czym praktyczne wskazówki o przypadkach, w których energie te należy uwzględnić, podane w rozdziale 4.2 są aktualne również w tym przypadku.

Po uwzględnieniu w równaniu (4.36) zależności (4.34), (4.8) i (4.9), otrzymujemy

$$E_s = m\left(i + \frac{w^2}{2} + gh\right). \quad (4.37)$$

W wypadku ciągłego przepływu czynnika strumień przekazywanej energii obliczamy z równania

$$\dot{E}_s = \dot{m}\left(i + \frac{w^2}{2} + gh\right), \quad (4.38)$$

w którym \dot{m} jest strumieniem masy przepływającego czynnika.

Ponieważ energia wewnętrzna właściwa jest funkcją stanu czynnika $u = u(T,p)$ i jest również taką funkcją iloczyn $pv = pv(T,p)$, więc entalpia właściwa jest również funkcją stanu czynnika

$$i = i(T,p),$$

a jej różniczka jest różniczką zupełną

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T dp. \quad (4.34)$$

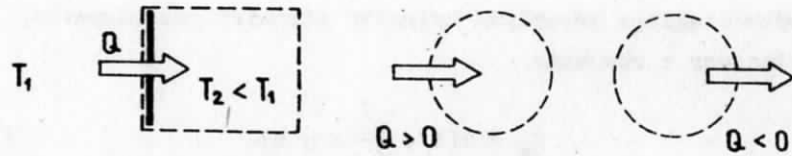
Natomiast entalpia I czynnika dostarczonego lub wyprowadzanego z układu, nie jest funkcją stanu układu. Różniczka entalpii dI jest różniczką niezupełną

$$dI = i dm, \quad (4.40)$$

gdzie dm jest elementarną masą przekazanego czynnika (porównaj analogiczne równanie (4.13) na różniczkę energii wewnętrznej właściwej).

4.3.3. Ciepło

Jeżeli na granicy bilansowanego układu znajduje się nieprzepuszczalna dla materii przegroda, przez którą jest przekazywana energia w sposób nie będący pracą, energia której przepływ jest wymuszony różnicą temperatur, to ten sposób przekazywania energii nazywamy **ciepłem** (rys. 4.15)*).

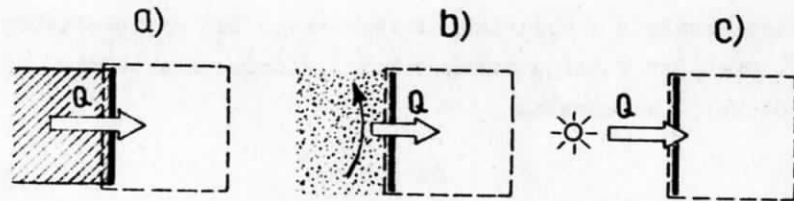


Rys. 4.15. Ciepło jako sposób przekazywania energii przez granicę bilansowanego układu

Umawiamy się, że ciepło dostarczone do układu będziemy traktować jako dodatnie, zaś ciepło wyprowadzone jako ujemne.

Przekazywanie energii w postaci ciepła przez granicę układu lub krótko przekazywanie ciepła może odbywać się trzema różnymi sposobami.

a) **P r z e w o d z e n i e** ma miejsce wówczas, gdy do osłony bilansowej przylega ciało stałe, z którego lub przez które przepływa energia do układu (rys. 4.16a).



Rys. 4.16. Różne sposoby przekazywania ciepła
a) przewodzenie, b) konwekcja, c) promieniowanie

* Należy jeszcze raz podkreślić, że nie można nazywać ciepłem energii wewnętrznej i entalpii, gdyż prowadziłoby to do wieloznaczności tego terminu i błędów obliczeń.

- b) **K o n w e k c j a**. Jeżeli przegroda leżąca na granicy układu jest omywana przez płyn (ciecz lub gaz) przewodzący ciepło, to ten sposób przekazywania ciepła, intensywniejszy od zwykłego przewodzenia, nazywamy konwekcją (rys. 4.16b).
- c) **P r o m i e n i o w a n i e** polega na przekazywaniu ciepła do układu za pomocą fal elektromagnetycznych (rys. 4.16c).

Mogą również wystąpić przypadki złożonego przekazywania ciepła równocześnie kilkoma sposobami.

Mechanizm zjawisk przekazywania ciepła, jak również zależności ilościowe wiążące ilość przekazywanego ciepła z wielkością bodźców wymuszających ten przepływ, będą omówione w rozdziałach 16+20. W rozdziale niniejszym będziemy zajmować się jedynie skutkiem wywołanym dostarczeniem do układu ciepła.

Dla wywołania tego samego skutku należy dostarczyć tym więcej ciepła, im większa jest masa czynnika znajdującego się w układzie. Ciepło dostarczone Q jest więc wielkością ekstensywną (proporcjonalną do masy)

$$Q = m q. \quad (4.41)$$

C i e p ł o j e d n o s t k o w e q nie jest funkcją stanu układu i zależy nie tylko od zmiany stanu układu, lecz również od rodzaju przemiany. Zmianę stanu układu związaną z dostarczeniem ciepła zwykle się kojarzy z zmianą temperatury, gdyż najczęstszym sposobem podwyższania lub obniżania temperatury układu jest dostarczenie lub odebranie pewnej ilości ciepła. Można wszakże wpływać na temperaturę gazu za pomocą pracy. I tak np. sprężarka adiabatyczna "podgrzewa" sprężony gaz doskonały (podwyższa jego temperaturę) dokładnie tak samo, jak grzejnik o tej samej mocy. Nie stosuje się oczywiście sprężarek do podgrzewania gazu, ale odwrotnie urządzenie, rozprężające gaz, bywa często stosowane do obniżania temperatury gazu wtedy, gdy z powodu braku chłodnicy o odpowiednio niskiej temperaturze nie jest możliwe odbieranie ciepła.

Z drugiej zaś strony dostarczanie ciepła wiąże się ze zmianą innych parametrów stanu: np. podgrzewanie izochoryczne powoduje wzrost ciśnienia, przy podgrzewaniu izobarycznym rośnie objętość właściwa, a przy przemianie izotermicznej dostarczaniu ciepła towarzyszy zmiana i ciśnienia i objętości właściwej, nie zmienia się natomiast temperatura.

Jeśli za miarę zmiany stanu wywołanej dostarczeniem ciepła przyjmujemy zmianę temperatury, to związek obu tych wielkości zapiszemy w postaci równania

$$dq = c dT \quad (4.42)$$

uwzględniającego również przypadki, gdy zależność ta nie jest liniowa. Współczynnik proporcjonalności

$$c = \frac{dq}{dT} \quad (4.43)$$

nazywamy ciepłem właściwym. Ciepło właściwe jest więc stosunkiem elementarnego ciepła jednostkowego dq dostarczonego do czynnika do wywołanego jego dostarczeniem elementarnego przyrostu temperatury dT .

Ciepło właściwe może jeszcze częściowo zależeć od stanu (czy też zmiany stanu) czynnika, ponosi natomiast całkowitą odpowiedzialność za rodzaj przemiany. I tak np. inną wartość ma ciepło właściwe przy przemianie izochorycznej c_v , inne przy przemianie izobarycznej c_p , przy czym zawsze $c_p > c_v$. Przy przemianie adiabatycznej ciepło właściwe $c_a = 0$, natomiast przy przemianie izotermicznej osiąga wartość nieskończenie dużą $c_t = +\infty$. Możliwe są również przemiany o ujemnym ciepłe właściwym, tzn. przemiany, podczas których dostarczenie ciepła związane jest ze spadkiem temperatury czynnika i na odwrót.

Jeżeli ciepło jednostkowe odniesiemy do kilomola

$$(Mq) = \frac{Q}{n}, \quad (4.44)$$

to w podobny sposób dojdziemy do pojęcia ciepła kilomolowego

$$(Mc) = \frac{d(Mq)}{dT}, \quad (4.45)$$

przy czym występujący po lewej stronie dwuliterowy symbol tego ciepła zachowuje i w tym wypadku sens iloczynu

$$(Mc) = M c.$$

Dla wyznaczenia ciepła dostarczonego do czynnika podczas pewnej przemiany konieczna jest znajomość masy czynnika m , jego ciepła właściwego c przy danej przemianie oraz przyrostu temperatury. Z równania (4.42) wynika, że

$$q = \int_{T_1}^{T_2} c dT,$$

a po uwzględnieniu definicji ciepła jednostkowego (4.41)

$$Q = m \int_{T_1}^{T_2} c dT. \quad (4.46)$$

Jeżeli znane jest ciepło kilomolowe (Mc) , to można się posłużyć zbliżonym równaniem

$$Q = n \int_{T_1}^{T_2} (Mc) dT. \quad (4.47)$$

Dla gazów doskonałych oraz dla niektórych cieczy i ciał stałych ciepło właściwe (najczęściej chodzi o ciepła właściwe c_v i c_p) jest, lub można traktować jako niezmiennicze i wówczas z równań (4.46) i (4.47) wynika

$$Q = m \int_{T_1}^{T_2} c dT = m c \int_{T_1}^{T_2} dT,$$

czyli

$$Q = m c (T_2 - T_1) = n(Mc)(T_2 - T_1). \quad (4.48)$$

Niekiedy operujemy pojęciem tzw. pojemności cieplnej

$$W = m c = n(Mc), \quad (4.49)$$

przy pomocy której równanie (4.48) można przedstawić w postaci

$$Q = W(T_2 - T_1).$$

W przypadku, gdy ciepło właściwe jest funkcją temperatury (np. dla gazu półdoskonałego)

$$c = c(T),$$

ilość dostarczonego ciepła można również obliczać z równania typu (4.48)

$$Q = m c \int_{T_1}^{T_2} (T_2 - T_1) = n(Mc) \int_{T_1}^{T_2} (T_2 - T_1). \quad (4.50)$$

W równaniu tym posłużono się średnią wartością ciepła właściwego w danym przedziale temperatur. Z porównania równań (4.46) i (4.50) wynika, że jest to średnia całkowa

$$c \int_{T_1}^{T_2} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} c dT \quad (4.51)$$

i analogicznie dla ciepła kilbomolowego (Mc). Średnią ciepło właściwe (4.51) jest funkcją dwóch temperatur: T_1 i T_2 , $c \int_{T_1}^{T_2} = f(T_1, T_2)$. Operowanie taką funkcją jest niewygodne, szczególnie wtedy, gdy

chcemy ją przedstawić tabelarycznie. Trudności tych można uniknąć wykorzystując właściwość addytywności całki oznaczonej

$$\int_{T_1}^{T_2} c dT = \int_{T_0}^{T_2} c dT - \int_{T_0}^{T_1} c dT,$$

gdzie T_0 jest ustaloną wartością. Wprowadzając średnie ciepło właściwe w przedziale temperatur o ustalonej dolnej granicy $T_0 = 0$

$$c \int_0^T = \frac{1}{T} \int_0^T c dT \quad (4.52)$$

będące już funkcją tylko jednej zmiennej T , otrzymujemy następujący związek

$$c \int_{T_1}^T = \frac{c \int_0^{T_2} T_2 - c \int_0^{T_1} T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.53)$$

dogodny do praktycznego stosowania. Tablice ciepła właściwego gazów półdoskonałych zawierają zwykle iloczyn $c \int_0^T$ przedstawiony jako funkcja temperatury T lub też ciepło molowe $(Mc) \int_0^T$ zdefiniowane równaniem identycznym z (4.52) i spełniające również zależność (4.53).

Punktem wyjścia wszystkich powyższych rozważań dotyczących ciepła właściwego była jego definicja (4.43). Ponieważ w definicji tej różniczkę temperatury bezwzględnej dT można zastąpić równą jej różniczką dt temperatury mierzonej na dowolnej innej skali, więc też wszystkie wyprowadzone równania (4.44) - (4.53) obowiązują również dla dowolnej skali temperatur, np. skali Celsjusza. Należy tylko w równaniach tych zastąpić T literą t , np.:

$$c \int_{t_1}^{t_2} = \frac{c \int_0^{t_2} t_2 - c \int_0^{t_1} t_1}{t_2 - t_1}.$$

W wypadku, gdy ciepło właściwe jest funkcją dwóch parametrów termicznych, np. $c = c(T, p)$ należy (pamiętając o tym, że ciepło właściwe dotyczy konkretnej przemiany) wyznaczyć dla danej przemiany zależność tego drugiego parametru od temperatury, np. $p = p(T)$ i sprowadzić przez to zagadnienie do przypadku $c = c(T)$.

Przy typowych przemianach: izochorze i izobarze, zależność ciepła właściwego od dwu parametrów termicznych wykazują gazy rzeczywiste, natomiast przy przemianach nietypowych (np. podgrzewanie gazu w zbiorniku o elastycznych ścianach - ciśnienie rośnie proporcjonalnie do objętości) zależność taką może wykazywać nawet gaz doskonały.

Operowanie ciepłem właściwym zależnym od dwóch parametrów stanu jest stosowane jedynie w najprostszych przypadkach - np. obliczenie ilości ciepła dostarczonego do gazu rzeczywistego przy przemianie izobarycznej $p = p_1$. Podstawiając wówczas w funkcji $c_p = c_p(T, p)$ ustaloną wartość ciśnienia uzyskujemy łatwe sprowadzenie do przypadku $c = c(T)$. W bardziej złożonych przypadkach (jak np. wspomniana wyżej nietypowa przemiana) lub też w przypadkach, gdy operowanie ciepłem właściwym traci sens (izoterma), ilość dostarczonego ciepła wyznaczamy z bilansu układu lub innych zależności (patrz rozdz. 6).

4.3.4. Energia elektryczna

Energia elektryczna jest jednym ze sposobów przekazywania energii przez granicę układu. W przypadku ciągłego przekazywania energii elektrycznej operuje się, podobnie jak przy pracy, mocą

$$N_{el} = \dot{E}_{el} \quad (4.54)$$

Ze znajomości mocy N_{el} i czasu jej załączenia, można wyznaczyć przekazaną energię elektryczną

$$E_{el} = \int_0^{\tau} N_{el} d\tau \quad (4.55)$$

Powiązanie ilości przekazanej energii elektrycznej z parametrami elektrycznymi wykracza poza ramy termodynamiki i nie będzie tu omawiane.

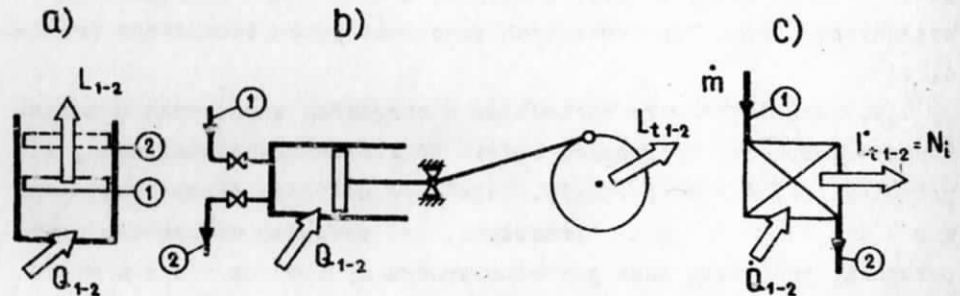
4.4. Równanie bilansu przemiany czynnika termodynamicznego

Opisane wyżej metody bilansowania dotyczą dowolnych, złożonych układów i dowolnych zachodzących w tych układach zjawisk. Bilansując np. kocioł parowy mamy do czynienia ze splotem wielu zjawisk i z różnymi czynnikami termodynamicznymi (H_2O , powietrze, paliwo, spaliny).

Równanie bilansu bardzo się upraszcza, gdy bilansowanym układem jest jeden czynnik termodynamiczny podlegający jednej przemianie (przemiany następujące po sobie, ale nie równoczesne, możemy też traktować jako jedną przemianę).

Sposób przeprowadzenia takiej przemiany może przebiegać według jednego z trzech niżej opisanych wariantów:

a) Cała masa czynnika jednorazowo podlega przemianie. Przykładem realizacji tego wariantu jest gaz umieszczony w cylindrze z tłokiem (tłok zapewnia, w razie potrzeby, zmianę objętości układu) - rys. 4.17a.



Rys. 4.17. Różne sposoby realizacji przemiany czynnika
 a) cylinder zamknięty tłokiem, b) maszyna przepływowa tłokowa,
 c) maszyna przepływowa o działaniu ciągłym

b) Przemianie podlegają kolejno określone porcje czynnika; proces taki zachodzi w tłokowej maszynie przepływowej (rys. 4.17b). Zatrzymując w jakimś momencie taką maszynę znajdujemy w jej wnętrzu pewną porcję czynnika o jednakowych parametrach odpowiadających jednemu punktowi przemiany.

c) Przemiana czynnika odbywa się w sposób ciągły - realizują ją maszyny przepływowe o działaniu ciągłym (rys. 4.17c). W maszynie tej ma miejsce ciągły przepływ czynnika, a zmiana jego stanu następuje przy przejściu od wlotu do wylotu z maszyny. Zatrzymanie takiej maszyny w dowolnej chwili i zamrożenie stanu, w którym nastąpiło to zatrzymanie, ukazałoby nam pełny obraz przemiany - wszystkie jej stany ułożone kolejno wzdłuż drogi przepływu czynnika.

We wszystkich trzech przypadkach zmiana stanu czynnika przebiega tak samo, jeżeli tylko warunki realizacji przemiany są takie same. Jeżeli np. cylinder (rys. 4.17a) będzie zaizolowany, to przy ruchu tłoka w dół (praca wkładana) będzie zachodziło sprężanie adiabatyczne gazu w cylindrze. Adiabatyczna sprężarka tłokowa (o zaizolowanym cylindrze) będzie realizować tę samą przemianę sprężania w sposób powtarzalny pobierając stale świeże porcje gazu i wyrzucając sprężone. Praca zużyta na sprężenie jednej porcji gazu jest różna od pracy zużytej w przypadku a) o pracę wtłaczania i wytłaczania gazu. Wypadkowa tych prac jest pracą techniczną (rozdz. 4.3.1).

Gdyby sprężanie gazu zachodziło w sprężarce wirnikowej o zaizolowanym korpusie, to również będzie to sprężanie adiabatyczne, ale przebiegające w sposób ciągły. Zależność pomiędzy parametrami gazu wzdłuż drogi przepływu, np. pomiędzy ciśnieniem i temperaturą, jest taka sama jak w przypadku a) i b) w czasie sprężania jednej porcji gazu. Tu również do pracy bezwzględnej sprężania dodaje się pracę wtłaczania i wytłaczania gazu tylko wszystkie te trzy prace są realizowane jednocześnie, w sposób ciągły, bo ciągły jest dopływ, wypływ i sprężanie. W sumie jest to

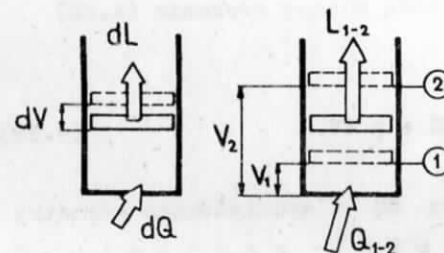
jednak ta sama praca techniczna i ilość pracy potrzebna do sprężenia pewnej porcji gazu jest jednakowa dla sprężarki tłokowej i wirnikowej.

Podobne trzy sposoby realizacji tego samego procesu można wskazać w dziedzinach nie mających nic wspólnego z termodynamiką - np. proces montażu radioodbiornika. Może go jednorazowo wykonać z posiadanych materiałów radioamator, może go wykonywać powtarzalnie jeden rzemieślnik montując kolejno po 1 odbiorniku, musi jednak zadbać dodatkowo o zaopatrzenie w materiały i zbyt produkcji (odpowiednik prac przetłaczania w przypadku b)), może też montować odbiorniki fabryka o produkcji taśmowej (odpowiednik maszyny przepływowej o działaniu ciągłym).

4.4.1. Bilans przemiany zamkniętej

Definicja zamkniętości przemiany podana w rozdziale 3. wymaga dodatkowego komentarza w odniesieniu do maszyn przepływowych. Mówiąc o niewystępowaniu dopływów i wypływów czynnika podczas prze-

miany nie mamy na myśli napełniania czynnikiem, który ma podlegać przemianie i wytłaczania czynnika po przemianie, a jedynie dodatkowe dopływy lub wypływy podczas przemiany. Np. przemiana sprężania w sprężarce tłokowej, byłaby otwarta, gdyby wskutek nie szczelności tłoka lub zaworów podczas samego sprężania część sprężanego gazu wpływała z cylindra.



Rys. 4.18. Bilans przemiany zamkniętej zachodzącej w cylindrze z tłokiem

Rozpatrzmy bilans przemiany zamkniętej zachodzącej w cylindrze zamkniętym tłokiem. Energia jest dostarczona do układu w postaci ciepła, odprowadzana w postaci pracy, przyrost energii układu jest

równy przyrostowi jego energii wewnętrznej. Dla przemiany elementarnej

$$dQ = dU + dL, \quad (4.56)$$

a dla całej przemiany 1-2

$$Q_{1-2} = U_2 - U_1 + L_{1-2}. \quad (4.57)$$

Równanie (4.57) można również uzyskać z równania (4.56) drogą formalnego całkowania.

Różniczka pracy bezwzględnej dL może być przedstawiona wzorem (4.18). Równanie (4.56) po wykorzystaniu tego wzoru, przyjmuje postać

$$dQ = dU + p dv - dL_f. \quad (4.58)$$

Praca tarcia jest równa ciepłu tarcia powstałemu z tej pracy

$$dL_f = dQ_f.$$

Po przeniesieniu tego wyrażenia na lewą stronę równania (4.58) otrzymujemy

$$dQ + dQ_f = dU + p dv. \quad (4.59)$$

Sumę ciepła dostarczonego z zewnątrz dQ i wydzielonego wewnątrz ciepła tarcia dQ_f nazywamy ciepłem całkowitym

$$dQ_c = dQ + dQ_f. \quad (4.60)$$

Jest ono również wielkością ekstensywną i odpowiada mu ciepło jednostkowe

$$dq_c = dq + dq_f. \quad (4.61)$$

Zamiast (4.59) możemy więc napisać

$$dQ_c = dU + p dv, \quad (4.62)$$

a po podzieleniu przez masę

$$d\left(\frac{Q_c}{m}\right) = d\left(\frac{U}{m}\right) + p d\left(\frac{V}{m}\right),$$

czyli

$$dq_c = du + p dv. \quad (4.63)$$

Z definicji entalpii właściwej, po jej zróżniczkowaniu, otrzymujemy

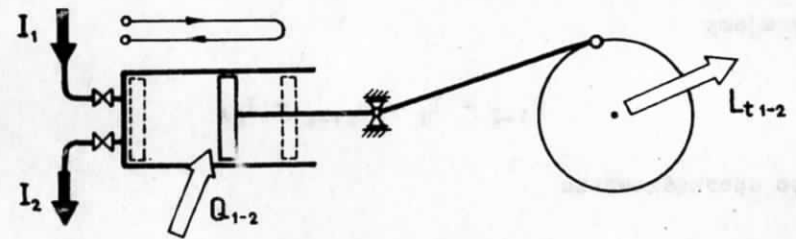
$$di = du + p dv + v dp,$$

lub

$$du + p dv = di - v dp,$$

co po uwzględnieniu w równaniu (4.63) daje

$$dq_c = di - v dp. \quad (4.64)$$



Rys. 4.19. Bilans jednego cyklu tłokowej maszyny przepływowej

Zbilansujemy teraz przemianę 1-2 zachodzącą w tłokowej maszynie przepływowej (rys. 4.19). Podczas jednego cyklu pracy tej maszyny dostarczamy energię strumienia napełniającego cylinder I_1 (podczas napełniania) i ciepło Q_{1-2} (podczas rozprężania)

$$E_d = I_1 + Q_{1-2}$$

wyprowadzamy zaś entalpię strumienia czynnika opuszczającego cylinder I_2 i pracę techniczną przemiany L_{t1-2} (realizowaną, jak wiemy, podczas wszystkich trzech etapów cyklu pracy maszyny tłokowej)

$$E_w = I_2 + L_{t1-2}$$

Na początku i końcu cyklu tłok zajmuje to samo położenie i energie układu są jednakowe, a dla maszyny idealnej (bez przestrzeni szkodliwej) obie wynoszą 0 (układ nie zawiera czynnika). A zatem przyrost energii układu jest zerowy

$$\Delta E_u = 0.$$

Jest to zresztą warunek konieczny dla periodyczności działania maszyny. Podstawiając wszystkie pozycje bilansu energii do równania bilansu

$$E_d = \Delta E_u + E_w,$$

otrzymujemy

$$Q_{1-2} + I_1 = L_{t1-2} + I_2,$$

lub po uporządkowaniu

$$Q_{1-2} = I_2 - I_1 + L_{t1-2} \quad (4.65)$$

Równanie to można było uzyskać z równania (4.57) na drodze czysto formalnej, wyrażając energię wewnętrzną przez entalpię

$$U_2 = I_2 - p_2 V_2,$$

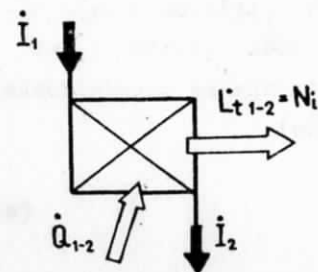
$$U_1 = I_1 - p_1 V_1.$$

Po podstawieniu otrzymujemy równanie

$$Q_{1-2} = I_2 - p_2 V_2 - I_1 + p_1 V_1 + L_{t1-2},$$

które po wykorzystaniu definicji pracy technicznej (równ. (4.23)) sprowadza się do równania (4.65).

Jeżeli zamknięta przemiana 1-2 jest realizowana w maszynie przepływowej o działaniu ciągłym (rys. 4.20), to bilans dla stanu ustalonego stwierdza równość strumienia energii dostarczonej $\dot{I}_1 + \dot{Q}_{1-2}$ i strumienia energii wyprowadzonej $\dot{I}_2 + N_1$



Rys. 4.20. Bilans maszyny przepływowej o działaniu ciągłym

lub po uporządkowaniu

$$\dot{Q}_{1-2} = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 + N_1 \quad (4.66)$$

Równanie to odpowiada ściśle równaniu (4.65) dla maszyny tłokowej z tą różnicą, że występują w nim strumienie energii.

4.4.2. Bilans przemiany otwartej

Bilans ten sporządzimy dla przemiany zachodzącej w cylindrze zamkniętym tłokiem. Rozpatrzmy tylko te przemiany otwarte, podczas których parametry czynnika przepływającego przez granicę układu są równe chwilowym parametrom czynnika znajdującego się w ukła-

dzie. Spełnienie się tego warunku jest praktycznie możliwe tylko dla przemian, podczas których czynnik w y p ł y w a z układu. Na rysunku 4.21 pokazano składowe bilansu nieskończenie krótkiego odcinka tej przemiany. Wstawienie tych pozycji do równania bilansu daje

$$\dot{d}Q = dU + \dot{d}L + \dot{d}I.$$

Podobnie jak przy bilansie przemiany zamkniętej (przekształcenie równania (4.56) do postaci (4.62)) możemy napisać

$$\dot{d}Q_c = dU + p dV + \dot{d}I \quad (4.67)$$

Stosujemy tu celowo symbol \dot{d} dla różniczek niezupełnych w celu wyraźnego ich podkreślenia. I tak różniczka niezupełna ciepła dostarczonego wynosi

$$\dot{d}Q_c = m \dot{d}q_c, \quad (a)$$

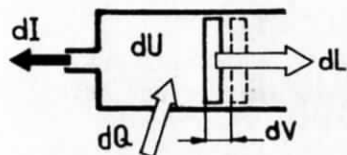
natomiast różniczki zupełne energii wewnętrznej i objętości obliczone są następująco:

$$dU = d(mu) = u dm + m du, \quad (b)$$

$$dV = d(mv) = v dm + m dv. \quad (c)$$

Różniczka energii wyprowadzonej ze strumieniem czynnika wpływającego jest różniczką niezupełną (por. równ. (4.40))

$$\dot{d}I = - i dm = - (u + pv)dm. \quad (d)$$



Rys. 4.21. Bilans przemiany otwartej

Znak minus pochodzi stąd, że dla wyznaczenia tej pozycji bilansu należy wziąć ubytek masy układu, a różniczka dm wyraża przyrost tej masy. Podstawiając równania (a) - (d) do równania (4.67) otrzymujemy

$$m dq_c = u dm + m du + pv dm + m p dv - u dm - pv dm.$$

Po redukcji wyrazów podobnych i podzieleniu przez m mamy

$$dq_c = du + p dv.$$

Równanie to jest identyczne z równaniem (4.63) dla przemiany zamkniętej. Obowiązuje oczywiście i równanie (4.64).

4.5. Kaloryczne równanie stanu

4.5.1. Zależności ogólne

Kalorycznymi parametrami stanu czynnika termodynamicznego są: energia wewnętrzna właściwa u , entalpia właściwa i oraz entropia właściwa s (wielkość ta będzie omówiona w rozdziale 6). Parametry kaloryczne są funkcjami stanu czynnika, tzn. zależą od termicznych parametrów stanu. Równania wyrażające tę zależność nazywają się kalorycznymi równaniami stanu.

Jeżeli stan czynnika opiszemy za pomocą temperatury i ciśnienia (trzeci parametr termiczny, jak wiadomo, nie jest niezależny), to równania te będą typu

$$u = u(T, p),$$

$$i = i(T, p),$$

a przy opisie stanu za pomocą temperatury i objętości właściwej

$$u = u(T, v),$$

$$i = i(T, v).$$

Energii wewnętrznej i entalpii nie da się zmierzyć. Można tylko wyznaczyć skończone przyrosty tych wielkości, tzn. różnice ich wartości w dwu określonych stanach (np. mierząc pracę bezwzględną dostarczoną do czynnika podczas przemiany adiabatycznej wyznaczamy przyrost energii wewnętrznej).

To spostrzeżenie natury eksperymentalnej rzutuje w sposób zasadniczy na sposób obliczania energii wewnętrznej i entalpii. Nie jest możliwe obliczenie bezwzględnych wartości energii wewnętrznej i entalpii. Możliwe jest tylko obliczenie ich przyrostów. Obliczenie przyrostu skończonego polega na sumowaniu przyrostów nieskończone małych, czyli na całkowaniu różniczki. Bezwzględna energia wewnętrzna lub entalpia może być przedstawiona jako suma bezwzględnej wartości w pewnym stanie odniesienia, określanym parametrami T_0 i p_0 i przyrostu od tego stanu do stanu, dla którego obliczamy tę wielkość

$$u = u(t,p) = u_0 + \int_{T_0, p_0}^{T, p} du, \quad (4.68)$$

$$i = i(t,p) = i_0 + \int_{T_0, p_0}^{T, p} di. \quad (4.69)$$

Wartości i_0 oraz u_0 pozostają niewiadome i w tej sytuacji nie pozostaje nic innego jak przyjąć umownie ich wartości. Nie ma to wpływu na wynik bilansowania, jeżeli tylko właściwie przyjęto poziom odniesienia. Jeżeli bilansujemy wyłącznie zjawiska fizyczne, bez zmiany stanu skupienia, można zupełnie dowolnie przyjąć parametry stanu odniesienia T_0 i p_0 . Gdy w bilansowanych zjawiskach fizycznych zachodzą dodatkowo zmiany stanu skupienia, poziom odniesienia musi być tak dobrany, aby przy całkowaniu uwidocznionym w równaniach (4.68) i (4.69) przejść przez interesujące nas zmiany stanu skupienia. W wypadku, gdy w grę wchodzi reakcje chemiczne oprócz parametrów stanu odniesienia T_0, p_0 należy przyjąć substancje odniesienia.

Z faktu, że energia wewnętrzna i entalpia właściwa są związane zależnością

$$i = u + pv$$

wynika, że stan odniesienia T_0, p_0 musi być przyjęty jednakowo dla obu tych wielkości, a wartość w stanie odniesienia może być przyjęta dla jednej z nich. W zastosowaniach technicznych wielokrotnie częściej posługujemy się entalpią niż energią wewnętrzną, dlatego też przyjmujemy wartość odniesienia i_0 dla entalpii, a dla energii wewnętrznej obliczamy z zależności

$$u_0 = i_0 - p_0 v_0, \quad (4.70)$$

gdzie

$$v_0 = v(T_0, p_0).$$

Entalpii i_0 nadaje się najczęściej wartość zerową, ale niekiedy (np. dla czynników ziębnicznych) przyjmuje się inną wartość.

Całki występujące w równaniach (4.68) i (4.69) są całkami krzywoliniowymi. Ponieważ różniczki du oraz di są różniczkami zupełnymi, droga całkowania łącząca punkty (T_0, p_0) i (T, p) może być dowolna. Dobieramy ją tak, by obliczenia były jak najprostsze. Zwykle całkuje się po izobarach i izotermach.

Dla obliczenia całek (4.68) i (4.69) należy znaleźć wyrażenia dla różniczek du i di . W przypadku entalpii właściwej różniczka ta ma postać

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T dp, \quad (4.71)$$

przy czym należy wyznaczyć zależności funkcyjne pochodnych $\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p$ i $\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T$ od temperatury i ciśnienia. W tym celu podstawmy równanie (4.71) do równania (4.64)

$$dq_c = dq + dq_f = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - v\right] dp.$$

Energii wewnętrznej i entalpii nie da się zmierzyć. Można tylko wyznaczyć skończone przyrosty tych wielkości, tzn. różnice ich wartości w dwu określonych stanach (np. mierząc pracę bezwzględną dostarczoną do czynnika podczas przemiany adiabatycznej wyznaczamy przyrost energii wewnętrznej).

To spostrzeżenie natury eksperymentalnej rzutuje w sposób zasadniczy na sposób obliczania energii wewnętrznej i entalpii. Nie jest możliwe obliczenie bezwzględnych wartości energii wewnętrznej i entalpii. Możliwe jest tylko obliczenie ich przyrostów. Obliczenie przyrostu skończonego polega na sumowaniu przyrostów nieskończone małych, czyli na całkowaniu różniczki. Bezwzględna energia wewnętrzna lub entalpia może być przedstawiona jako suma bezwzględnej wartości w pewnym stanie odniesienia, określanym parametrami T_0 i p_0 i przyrostu od tego stanu do stanu, dla którego obliczamy tę wielkość

$$u = u(t, p) = u_0 + \int_{T_0, p_0}^{T, p} du, \quad (4.68)$$

$$i = i(t, p) = i_0 + \int_{T_0, p_0}^{T, p} di. \quad (4.69)$$

Wartości i_0 oraz u_0 pozostają niewiadome i w tej sytuacji nie pozostaje nic innego jak przyjąć umownie ich wartości. Nie ma to wpływu na wynik bilansowania, jeżeli tylko właściwie przyjęto poziom odniesienia. Jeżeli bilansujemy wyłącznie zjawiska fizyczne, bez zmiany stanu skupienia, można zupełnie dowolnie przyjąć parametry stanu odniesienia T_0 i p_0 . Gdy w bilansowanych zjawiskach fizycznych zachodzą dodatkowo zmiany stanu skupienia, poziom odniesienia musi być tak dobrany, aby przy całkowaniu uwidocznionym w równaniach (4.68) i (4.69) przejść przez interesujące nas zmiany stanu skupienia. W wypadku, gdy w grę wchodzi reakcje chemiczne oprócz parametrów stanu odniesienia T_0, p_0 należy przyjąć substancje odniesienia.

Z faktu, że energia wewnętrzna i entalpia właściwa są związane zależnością

$$i = u + pv$$

wynika, że stan odniesienia T_0, p_0 musi być przyjęty jednakowo dla obu tych wielkości, a wartość w stanie odniesienia może być przyjęta dla jednej z nich. W zastosowaniach technicznych wielokrotnie częściej posługujemy się entalpią niż energią wewnętrzną, dlatego też przyjmujemy wartość odniesienia i_0 dla entalpii, a dla energii wewnętrznej obliczamy z zależności

$$u_0 = i_0 - p_0 v_0, \quad (4.70)$$

gdzie

$$v_0 = v(T_0, p_0).$$

Entalpii i_0 nadaje się najczęściej wartość zerową, ale niekiedy (np. dla czynników ziębniczych) przyjmuje się inną wartość.

Całki występujące w równaniach (4.68) i (4.69) są całkami krzywoliniowymi. Ponieważ różniczki du oraz di są różniczkami zupełnymi, droga całkowania łącząca punkty (T_0, p_0) i (T, p) może być dowolna. Dobieramy ją tak, by obliczenia były jak najprostsze. Zwykle całkuje się po izobarach i izotermach.

Dla obliczenia całek (4.68) i (4.69) należy znaleźć wyrażenia dla różniczek du i di . W przypadku entalpii właściwej różniczka ta ma postać

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T dp, \quad (4.71)$$

przy czym należy wyznaczyć zależności funkcyjne pochodnych $\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p$ i $\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T$ od temperatury i ciśnienia. W tym celu podstawmy równanie (4.71) do równania (4.64)

$$dq_c = dq + dq_f = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - v\right] dp.$$

Równanie to stosuje się do wszystkich przemian. W szczególności dla przemiany izobarycznej ($dp = 0$) i beztarciowej ($dq_f = 0$) mamy

$$dq = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT. \quad (a)$$

Z definicji ciepła właściwego

$$dq = c_p dT. \quad (b)$$

Porównując równania (a) i (b) otrzymujemy

$$c_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p. \quad (4.72)$$

Drugą pochodną cząstkową występującą w różniczkę (4.71) można przedstawić równaniem^{x)}

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p. \quad (4.73)$$

Ostateczna postać różniczki (4.71), dogodna do całkowania, jest następująca

$$di = c_p dT + \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \right] dp. \quad (4.74)$$

Ciepło właściwe c_p wyznacza się dla danego czynnika na drodze doświadczalnej, natomiast zależność pochodnej cząstkowej (4.73) od T i p wyznacza się ze znajomości termicznego równania stanu $v = v(T, p)$. Podobnie dla różniczki zupełnej energii wewnętrznej właściwej, wyrażonej jako funkcja T i v

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv \quad (4.75)$$

^{x)} Dowód tej zależności wymaga znajomości pojęcia entropii i będzie przeprowadzony w rozdziale 5 dotyczącym II zasady termodynamiki.

obowiązują zależności

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v, \quad (4.76)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p \quad (4.77)$$

uzyskiwane w ten sam sposób co równania (4.72) i (4.73).

4.5.2. Gaz doskonały i półdoskonały

Oba te gazy spełniają równanie Clapeyrona $pv = RT$ i z tego faktu wynika, że

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = v - T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{RT}{p}\right) = v - T \frac{R}{p} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p = T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{RT}{v}\right)_v - p = T \frac{R}{v} - p = 0,$$

co po wstawieniu do równań (4.74) i (4.75) daje

$$di = c_p dT, \quad (4.78)$$

$$du = c_v dT. \quad (4.79)$$

Energia wewnętrzna i entalpia gazu doskonałego i półdoskonałego zależy więc wyłącznie od temperatury (nie zależy od ciśnienia i objętości właściwej). Wykonując całkowania przewidziane w równaniach (4.68) i (4.69) otrzymujemy

$$i = i_0 + \int_{T_0}^T c_p dT, \quad (4.80)$$

$$u = u_0 + \int_{T_0}^T c_v dT. \quad (4.81)$$

Poziom odniesienia przyjmuje się dwojako:

$$(a) \quad T_0 = 0^{\circ}\text{K}, \quad i_0 = 0.$$

W myśl równania (4.70) wartość odniesienia dla energii wewnętrznej wynosi

$$u_0 = i_0 - p_0 v_0 = i_0 - RT_0 = 0.$$

Równania (4.80) i (4.81) dla tego przypadku mają postać

$$i = \int_0^T c_p dT, \quad (4.82)$$

$$u = \int_0^T c_v dT. \quad (4.83)$$

$$b) \quad T_0 = 273,15^{\circ}\text{K} \quad (t_0 = 0^{\circ}\text{C}), \quad i_0 = 0.$$

Wartość odniesienia dla energii wewnętrznej, wyliczona z równania (4.70), wynosi

$$u_0 = i_0 - RT_0 = -273,15 \text{ R.}$$

Postać równań (4.80) i (4.81) jest dla tego poziomu odniesienia następująca

$$i = \int_{273,15}^T c_p dT,$$

$$u = \int_{273,15}^T c_v dT - 273,15 \text{ R.}$$

a po zamianie zmiennych $t = T - 273,15$

$$i = \int_0^t c_p dt, \quad (4.84)$$

$$u = \int_0^t c_v dt - 273,15 \text{ R.} \quad (4.85)$$

Dla gazu doskonałego ciepło właściwe jest stałe $c_p = \text{idem}$, $c_v = \text{idem}$, dzięki czemu otrzymujemy

$$a) \quad \text{dla } T_0 = 0^{\circ}\text{K}, \quad i_0 = 0$$

$$i = c_p T, \quad (4.86)$$

$$u = c_v T. \quad (4.87)$$

$$b) \quad \text{dla } t_0 = 0^{\circ}\text{C}, \quad i_0 = 0$$

$$i = c_p t, \quad (4.88)$$

$$u = c_v t - 273,15 \text{ R.} \quad (4.89)$$

Dla gazu półdoskonałego ciepło właściwe jest funkcją temperatury $c_p = c_p(T)$ i $c_v = c_v(T)$. Stosując pojęcie średniego ciepła właściwego (równ.(4.52)) otrzymujemy zamiast równań (4.82) - (4.85):

$$a) \quad \text{dla } T_0 = 0, \quad i_0 = 0$$

$$i = c_p \left| \begin{array}{l} T \\ 0 \end{array} \right. T, \quad (4.90)$$

$$u = c_v \left| \begin{array}{l} T \\ 0 \end{array} \right. T, \quad (4.91)$$

b) dla $t_0 = 0^\circ\text{C}$

$$i = c_p \int_0^t t, \quad (4.92)$$

$$u = c_v \int_0^t t - 273,15 \text{ R}. \quad (4.93)$$

Wszystkie równania przytoczone w rozdziale 5.5 obowiązują również dla energii wewnętrznej molowej (Mu) i entalpii molowej (Mi), po obustronnym pomnożeniu przez M . Miejsce ciepła właściwego c_p i c_v zajmują ciepła molowe (Mc_p) i (Mc_v).

4.6. Ciepło właściwe gazów doskonałych

Termodynamika fenomenologiczna nie daje możliwości wyznaczenia ciepła właściwego gazu na drodze teoretycznej, umożliwia jedynie znalezienie związku pomiędzy ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu c_p i przy stałej objętości c_v . Związek ten wynika z definicji entalpii, której postać różniczkowa jest następująca

$$di = du + d(pv)$$

oraz z równań (4.78) i (4.79) i równania Clapeyrona $pv = RT$

$$c_p dT = c_v dT + R dT,$$

po uproszczeniu

$$c_p = c_v + R. \quad (4.94)$$

Identyczny związek obowiązuje dla ciepła molowego

$$(Mc_p) = (Mc_v) + (MR). \quad (4.95)$$

Łatwo zauważyć, że równania (4.94) i (4.95) obowiązują również dla gazów półdoskonałych, gdyż taki jest zakres ważności zależności użytych do ich wyprowadzenia.

Często operujemy stosunkiem ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu i ciepła właściwego przy stałej objętości, zwanym w y - k ł a d n i k i e m a d i a b a t y

$$\mathcal{H} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{(Mc_p)}{(Mc_v)}. \quad (4.96)$$

W wypadku, gdy znany jest wykładnik adiabaty \mathcal{H} i stała gazowa R , można wyznaczyć z równań (4.94) i (4.95) ciepła właściwe

$$c_p = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}-1} R, \quad (4.97)$$

$$c_v = \frac{1}{\mathcal{H}-1} R \quad (4.98)$$

i analogicznie dla ciepła molowego

$$(Mc_p) = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}-1} (MR), \quad (4.99)$$

$$(Mc_v) = \frac{1}{\mathcal{H}-1} (MR). \quad (4.100)$$

Wyznaczenie ciepła właściwego gazu doskonałego jest możliwe na gruncie termodynamiki statystycznej. Energia wewnętrzna gazu doskonałego jest interpretowana jako suma energii kinetycznych cząstek, przy czym energia kinetyczna pojedynczej cząstki składa się z energii kinetycznej ruchu postępowego i obrotowego.

Przyjmujemy zasadę ekwipartycji energii, w myśl której energia kinetyczna cząstki rozkłada się równomiernie na wszystkie stopnie swobody ruchu cząstki. W rezultacie otrzymujemy dla energii wewnętrznej właściwej wyrażenie

$$u = z \frac{R}{2} T, \quad (4.101)$$

gdzie z jest ilością stopni swobody ruchu cząstki. Dla gazów jednoatomowych $z = 3$ (3 stopnie swobody ruchu postępowego, brak ruchów obrotowych - cząstka jest punktem materialnym), dla gazów dwuatomowych $z = 5$ (3 stopnie swobody ruchu postępowego, 2 stopnie swobody ruchu obrotowego - brak obrotów względem osi przechodzącej przez oba atomy), dla gazów 3- i więcej atomowych $z = 6$ (3 stopnie swobody ruchu postępowego, 3 stopnie swobody ruchu obrotowego). Porównując równanie (4.101) z równaniem (4.87) otrzymujemy

$$c_v = z \frac{R}{2}, \quad (4.102)$$

a po uwzględnieniu (4.94)

$$c_p = (z + 2) \frac{R}{2}. \quad (4.103)$$

Analogiczne równania obowiązują dla ciepła molowego

$$(Mc_v) = z \frac{(MR)}{2}, \quad (4.104)$$

$$(Mc_p) = (z + 2) \frac{(MR)}{2}. \quad (4.105)$$

Ponieważ (MR) jest stałą uniwersalną, więc ciepła molowe gazów doskonałych zależą wyłącznie od ilości atomów w cząsteczce gazu. W zestawieniu 4.1 podano wartości ciepła właściwego oraz wykładnika adiabaty gazów doskonałych.

Zestawienie 4.1

Ciepło właściwe i wykładnik adiabaty gazów doskonałych
(wartości ciepła właściwego w $\frac{kJ}{kmol \cdot deg}$)

G a z	(Mc_v)	(Mc_p)	κ
Jednoatomowy	12,5	20,8	$\frac{5}{3} = 1,667$
Dwuatomowy	20,8	29,1	$\frac{7}{5} = 1,4$
Trzy- i więcej atomowy	24,9	33,3	$\frac{4}{3} = 1,333$

Używając jako jednostki energii kilokalorii otrzymamy $\frac{(MR)}{2} = 0,993 \approx 1 \frac{kcal}{kmol \cdot deg}$, a więc ciepło molowe (Mc_v) równa się liczbowo ilości stopni swobody, a ciepło molowe (Mc_p) jest o 2 większe.

R o z d z i a ł 5

DRUGA ZASADA TERMODYNA MIKI

Obserwacja zjawisk zachodzących w przyrodzie wskazuje na jednokierunkowość ich przebiegu. Wszystkie zjawiska jakie obserwujemy są nieodwracalne. W układzie odosobnionym nieodwracalność zjawiska wyraża się niemożliwością powrotu układu do stanu początkowego zjawiska. Ponieważ stanem początkowym może być każdy stan poprzedzający stan końcowy, więc ogólniej możemy stwierdzić niemożliwość powrotu do jakiegokolwiek stanu z przeszłości układu. Układ nieodosobniony podczas realizacji zjawiska współpracuje ze swym otoczeniem. Wyodrębniając z tego otoczenia elementy (nazwijmy je ciałami) współpracujące z układem, możemy stwierdzić, że nieodwracalność zjawiska polega na niemożności powrotu do dowolnie przyjętego stanu poprzedniego wszystkich ciał biorących udział w zjawisku. Możliwe jest oczywiście przywrócenie samemu układowi stanu początkowego, wymagać to jednak będzie zaangażowania w innym stopniu otoczenia, w wyniku czego pozostają w nim trwałe zmiany. Rozpatrzmy jako przykład stygnięcie kawałka metalu w powietrzu. Zjawisko to jest nieodwracalnym przekazaniem energii w postaci ciepła przez metal otaczającemu je powietrzu. Odwrotne zjawisko, choć spełniałoby ono wymogi prawa zachowania energii, zajść nie może. Można oczywiście przywrócić metalowi jego stan początkowy, musimy jednak zrezygnować z ciepła, jakie oddał on powietrzu i zaangażować inne źródło ciepła o wyższej temperaturze np. palnik, który do tego celu spali pewną ilość paliwa. Innym przykładem zjawiska nieodwracalnego jest przepływ gazu w rurociągu. W wyniku tarcia mającego miejsce przy przepływie (wywołanego lepkością gazu) ciśnienie gazu spada, mimo że gaz nie wykonuje na zewnątrz żadnej pracy. Odwróce-

nie zjawiska nie jest możliwe, gdyż gaz samoczynnie nie zwiększy ciśnienia przy przepływie. Możemy przywrócić mu ciśnienie pierwotne. Trzeba jednak do tego celu zaangażować sprężarkę zużywającą pracę.

Tłący się w powietrzu papieros jest przykładem dwóch innych zjawisk nieodwracalnych - nieodwracalnej reakcji spalania tytoniu i nieodwracalnego procesu mieszania się dymu (spalin) z powietrzem (proces ten jest zwany dyfuzją).

Obserwacja zjawisk nieodwracalnych nasuwa nam jeszcze jedno spostrzeżenie - im bardziej spontanicznie i gwałtownie przebiega zjawisko nieodwracalne, tym trudniej przywrócić układ do stanu pierwotnego, tym większe zmiany spowoduje to odwrócenie w otoczeniu układu. Opisane wyżej stygnięcie kawałka metalu w powietrzu będzie przebiegać tym szybciej, im metal ten będzie gorętszy, tzn. i. większa będzie różnica temperatur pomiędzy metalem i powietrzem ale też dla powrotnego ogrzania metalu trzeba będzie użyć palnika o wyższej temperaturze płomienia, a więc spalającego lepsze paliwo.

Zjawiska są więc w różnym stopniu nieodwracalne, w zależności od warunków w jakich przebiegają. Przy odpowiednim doborze tych warunków można tę nieodwracalność zmniejszyć w dowolnym stopniu i dowolnie blisko zbliżyć się do ideału, jakim jest zjawisko odwracalne. Np. spadek ciśnienia przy przepływie gazu rurociągiem można dowolnie zmniejszyć przy doborze odpowiednio dużej średnicy rurociągu (spadek ciśnienia zależy od szybkości przepływu). W ten sposób możemy się dowolnie blisko zbliżyć do odwracalnego przepływu, jakim byłby przepływ bez spadku ciśnienia.

Zjawisko odwracalne charakteryzuje się tym, że układ w którym ono przebiega, może powrócić do stanu początkowego bez pozostawienia trwałych zmian w otoczeniu (tzn. przy oddaniu otaczającym ciałom dokładnie tego samego co pobrano przy realizacji zjawiska i na odwrót).

Wyżej opisane prawidłowości nie dadzą się opisać za pomocą poznanych uprzednio praw termodynamiki, a w szczególności pierwszej

zasady. Przy formalnym odwróceniu dowolnego zjawiska prawo zachowania energii jest znów spełnione, a w równaniu bilansu energii jedynie wszystkie wartości zmieniają znak na przeciwny. Ten niedostatek pierwszej zasady termodynamiki uzupełnia druga zasada termodynamiki.

W myśl drugiej zasady termodynamiki w pobliżu każdego stanu układu znajdują się stany nieosiągalne na drogach adiabatycznych. Są to właśnie te stany, które były wyjściowymi stanami adiabatycznych przemian nieodwracalnych kończących się danym stanem układu. Układ nieadiabatyczny łatwo sprowadzić do adiabatycznego w sposób podany przy omówieniu pierwszej zasady termodynamiki.

Podane sformułowanie drugiej zasady termodynamiki nie nadaje się wprost do praktycznego stosowania (podobnie jak sformułowanie zerowej zasady termodynamiki). Droga logiczno-matematycznych operacji można z niego wydedukować dwa postulaty:

1. Istnienie nowej funkcji stanu zwanej entropią.
2. Zasadę wzrostu entropii będącą właściwym roboczym sformułowaniem drugiej zasady termodynamiki, gdyż to właśnie ona wytycza jednokierunkowość przebiegu zjawisk.

5.1. Entropia

Różniczka niezupełna ciepła całkowitego δQ_c posiada czynnik całkujący będący odwrotnością temperatury bezwzględnej i zamieniający ją w różniczkę zupełną funkcji stanu układu zwanej entropią

$$ds = \frac{\delta Q_c}{T} \quad (5.1)$$

Entropia jest wielkością ekstensywną (proporcjonalną do masy układu)

$$S = m s, \quad (5.2)$$

przy czym odpowiednikiem równania (5.1) dla entropii właściwej jest

$$ds = \frac{\delta q_c}{T} \quad (5.3)$$

Stosując zależności (4.63) i (4.64) otrzymujemy dwa dalsze równania, będące podstawą do obliczania entropii właściwej

$$ds = \frac{du + p dv}{T} \quad (5.4)$$

$$ds = \frac{di - v dp}{T} \quad (5.5)$$

Jeżeli do określenia stanu czynnika posłużymy się ciśnieniem i temperaturą, to dla wyznaczenia zależności $s = s(T, p)$ należy wyjść z równania (5.5). Rozpisując różniczkę entalpii właściwej otrzymujemy

$$ds = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT + \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T - v \right] dp \quad (5.6)$$

Ponieważ ds jest różniczką zupełną, więc z równania (5.6) można wyznaczyć pochodne cząstkowe entropii

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p,$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T - v \right],$$

a dalej przez różniczkowanie obliczyć pochodne mieszane

$$\frac{\partial^2 s}{\partial T \partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p \right] = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 i}{\partial T \partial p},$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial p \partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T - v \right] \right] = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T + \frac{v}{T^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 i}{\partial p \partial T} - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p.$$

Z warunku równości pochodnych mieszanych

$$\frac{\partial^2 s}{\partial T \partial p} = \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial T},$$

czyli

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 i}{\partial T \partial p} = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T + \frac{v}{T^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 i}{\partial p \partial T} - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p,$$

otrzymujemy związek

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p, \quad (5.7)$$

który bez dowodu był wykorzystany w poprzednim rozdziale (równ. 4.73)).

Wstawiając (5.7) do (5.6) i uwzględniając dodatkowo (4.72) otrzymujemy ostatecznie

$$ds = \frac{c_p}{T} dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp. \quad (5.8)$$

Podobnie jak przy obliczaniu energii wewnętrznej i entalpii, obliczenie entropii polega na wyznaczeniu nadwyżki entropii ponad pewien umownie przyjęty stan odniesienia $s_0 = s(T_0, p_0)$

$$s = s_0 + \int_{T_0, p_0}^{T, p} ds = s_0 + \int_{T_0, p_0}^{T, p} \frac{c_p}{T} dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp. \quad (5.9)$$

Dla obliczenia całki w równaniu (5.9) należy znać ciepło właściwe c_p (czynnik termodynamiczny (ogólnie jest ono zależne od temperatury i ciśnienia) oraz termiczne równanie stanu $v = v(T, p)$ dla wyznaczenia pochodnej $\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$. Ponadto trzeba przyjąć drogę całkowania, przy czym z uwagi na zupełność różniczki ds istnieje tu duża dowolność.

Dla wyznaczenia zależności entropii od temperatury i objętości właściwej należy wyjść z równania (5.4), które po rozpisaniu róż-

niczki energii wewnętrznej, wyrażonej również jako funkcja T i v , ma postać

$$ds = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] dv. \quad (5.10)$$

Podobnie jak poprzednio, z równości pochodnych cząstkowych mieszanych

$$-\frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \right] = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] \right]$$

otrzymujemy zależność

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \quad (5.11)$$

wykorzystywaną bez dowodu w rozdz. 4 (równ. (4.77)). Wstawiając do równania (5.10) równanie (5.11) i (4.76) otrzymujemy dla różniczki entropii ds wyrażenie

$$ds = \frac{c_v}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv, \quad (5.12)$$

które po scałkowaniu umożliwia obliczenie entropii jako nadwyżki ponad stan odniesienia $s_0 = s(T_0, v_0)$

$$s = s_0 + \int_{T_0, v_0}^{T, v} ds = s_0 + \int_{T_0, v_0}^{T, v} \frac{c_v}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv, \quad (5.13)$$

przy czym przyjęty tu poziom odniesienia T_0, v_0 jest związany z poprzednim T_0, p_0 równaniem stanu $v_0 = v(T_0, p_0)$.

5.1.1. Entropia właściwa ciał stałych i cieczy

Ciała stałe i ciecze można traktować jako nieściśliwe i nierozszerzalne przy zmianach temperatury

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = 0.$$

Z tych samych powodów można operować jednym ciepłem właściwym

$$c = c_v = c_p.$$

Równanie (5.9) upraszcza się zatem do postaci

$$s = s_0 + \int_{T_0}^T \frac{c}{T} dT. \quad (5.14)$$

Jeżeli pominiemy zależność ciepła właściwego od temperatury, to po wykonaniu całkowania otrzymamy

$$s = c \ln \frac{T}{T_0}, \quad (5.15)$$

przy czym przyjęto tu zerową wartość entropii odniesienia $s_0 = 0$.

5.1.2. Entropia właściwa gazów doskonałych i półdoskonałych

Pochodną cząstkową występującą w równaniu (5.9) oblicza się z obowiązującego dla gazów doskonałych i półdoskonałych równania Clapeyrona

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial}{\partial T} \frac{RT}{p} = \frac{R}{p},$$

w wyniku czego

$$s = s_0 + \int_{T_0, p_0}^{T, p} \frac{c_p}{T} dT - \frac{R}{p} dp. \quad (5.16)$$

Ponieważ ciepło właściwe nie zależy od ciśnienia, więc całkę (5.16) można przedstawić następująco

$$s = s_0 + \int_{T_0}^T \frac{c_p(T)}{T} dT - R \int_{p_0}^p \frac{dp}{p}.$$

Po wyliczeniu drugiej całki oraz po przyjęciu poziomu odniesienia $s_0 = 0$ otrzymujemy

$$s = \int_{T_0}^T \frac{c_p(T)}{T} dT - R \ln \frac{p}{p_0}. \quad (5.17)$$

Równanie (5.17) obowiązuje dla gazów półdoskonałych i doskonałych z tym, że dla gazów doskonałych $c_p = \text{idem}$ i po wykonaniu całkowania

$$s = c_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0}. \quad (5.18)$$

Podobnie wyprowadza się równania określające zależność entropii właściwej od temperatury i objętości właściwej.

Dla gazów półdoskonałych

$$s = \int_{T_0}^T \frac{c_v(T)}{T} dT + R \ln \frac{v}{v_0}. \quad (5.19)$$

Dla gazów doskonałych

$$s = c_v \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{v}{v_0}, \quad (5.20)$$

przy czym w równaniach tych również przyjęto $s_0 = 0$.

5.2. Zasada wzrostu entropii

Dla każdego rzeczywistego zjawiska nie odwracalnego zachodzącego w przyrodzie suma przyrostów entropii \mathcal{N} wszystkich ciał uczestniczących w zjawisku jest dodatnia

$$\mathcal{N} > 0. \quad (5.21)$$

Gdyby zjawisko przebiegało odwracalnie, to wówczas

$$\mathcal{N} = 0. \quad (5.22)$$

Niemożliwe są natomiast zjawiska, dla których suma ta byłaby ujemna.

Jak widać z powyższego sformułowania użycie zasady wzrostu entropii, stanowiącej istotę drugiej zasady termodynamiki wymaga uprzednio sprecyzowania obiektu, do którego będziemy ją stosować. Podobnie jak przy stosowaniu pierwszej zasady termodynamiki należy w tym celu wyraźnie określić układ, w którym przebiega rozpatrywane zjawisko oraz określić początek i koniec badanego zjawiska. Rozpatrywany układ wyodrębniamy myślową osłoną kontrolną, przy czym obowiązują tu wszystkie uwagi, jakie na temat doboru osłony kontrolnej poczyniliśmy przy okazji pierwszej zasady termodynamiki.

Na przyrost entropii zjawiska π składa się przyrost entropii układu (wnętrza osłony kontrolnej) ΔS_u oraz przyrosty entropii tych ciał znajdujących się poza układem, które współpracują z układem w sensie energetycznym (tzn. dostarczają mu lub odbierają od niego energię).

Przyrost entropii układu równa się różnicy entropii układu na końcu i na początku zjawiska

$$\Delta S_u = S_{u2} - S_{u1}, \quad (5.23)$$

przy czym dla układu złożonego z podukładów jego entropia jest sumą entropii podukładów.

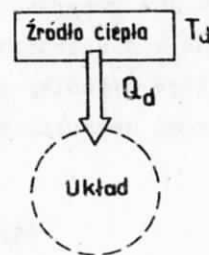
Ciała znajdujące się poza układem i współpracujące energetycznie z układem przy realizacji zjawiska podzielimy według sposobów przekazywania energii na:

- źródła ciepła dostarczające lub pobierające ciepło z układu,
- źródła masy dostarczające lub pobierające masę z układu,
- źródła pracy i energii elektrycznej.

Mówiąc o przyrostach entropii ciał będących poza układem i współpracujących z układem mamy na myśli przyrosty niezbędnie związane z tą współpracą. Jeżeli w ciałach tych zachodzą dodatkowe zjawiska nieodwracalne, to nie mogą one iść na konto zjawiska zachodzącego w układzie.

Przyrost entropii źródła ciepła dla źródła dostarczającego ciepło do układu (rys. 5.1) obliczymy z definicji entropii

$$dS_{zc} = - \frac{dQ_d}{T_{zc}}. \quad (5.24)$$



Rys. 5.1. Źródło ciepła dostarczające ciepło

Znak "-" oznacza, że dodatnie ciepło dQ_d zostało odprowadzone ze źródła ciepła. W równaniu tym uwzględniono $dQ_f = 0$, gdyż tarcie nie jest niezbędne dla transportu ciepła od źródła do czynnika i nawet gdyby występowało w źródle, nie może iść na kon- to przemiany zachodzącej w układzie. Źródłem ciepła dla rozpatrywanego układu może być każde ciało, które wymienia z nim ciepło i ogólnie jego temperatura może być zmienna w czasie zjawiska. Wówczas całkowanie równania (5.24) daje

$$\Delta S_{zc} = - \int_1^2 \frac{dQ_d}{T_{zc}}, \quad (5.25)$$

przy czym całkowanie rozciąga się na cały czas trwania przemiany pomiędzy stanami 1 i 2. W wielu jednak przypadkach źródło ciepła nie zmienia swej temperatury ($T_{zc} = \text{idem}$) bądź to dzięki generowaniu wewnątrz źródła ciepła (np. palnik) lub też dzięki swej nieskończenie dużej pojemności cieplnej (np. otoczenie) i wtedy po wykonaniu całkowania w równaniu (5.25) otrzymujemy

$$\Delta S_{zc} = - \frac{Q_d}{T_{zc}}. \quad (5.26)$$

Dla źródła pobierającego ciepło Q_w z układu w równaniach (5.25) i (5.26) zmienia się jedynie znak

$$\Delta S_{zc} = \int_1^2 \frac{dQ_w}{T_{zc}}, \quad (5.27)$$

a przy $T_{zc} = \text{idem}$

$$\Delta S_{zc} = \frac{Q_w}{T_{zc}} \quad (5.28)$$

Źródło masy to każde ciało dostarczające lub pobierające masę z układu, przy czym zupełnie nie jest istotne czym to źródło jest. Zmiana jego entropii wynika z ubytku lub przyrostu masy niosącej ze sobą pewną entropię. Jeżeli czynnik o entropii właściwej s_d dopływa do układu, to masa dm_d tego czynnika zuboża źródło masy o entropię $s_d dm_d$, a więc przyrost entropii wynosi

$$dS_{zm} = -s_d dm_d \quad (5.29)$$

Dla całej porcji masy m_d

$$\Delta S_{zm} = - \int_1^2 s_d dm_d \quad (5.30)$$

przy czym całkowanie rozciąga się na całą przemianę 1-2. Jeżeli parametry dostarczanego czynnika są stałe, to po wykonaniu całkowania

$$\Delta S_{zm} = -m_d s_d \quad (5.31)$$

Jeżeli masa m_w o entropii właściwej s_w wypływa z układu, to użyjemy takich samych wzorów, jedynie ze znakiem przeciwnym

$$\Delta S_{zm} = \int_1^2 s_w dm_w \quad (5.32)$$

a dla $s_w = \text{idem}$

$$\Delta S_{zm} = m_w s_w \quad (5.33)$$

Źródła pracy i energii elektrycznej nie zmieniają swojej entropii z powodu współpracy z układem. Źródłem pracy może być np. ciężarek, który skutek pobierania lub oddawania układowi pracy zmienia swą

energię potencjalną. Entropia ciężarka nie zmienia się oczywiście z powodu zmiany jego wysokości. Jeżeli w źródle pracy lub energii elektrycznej zachodzą dodatkowo zjawiska nieodwracalne, to spowodowane nimi przyrosty entropii nie mogą iść na karb układu (np. tarcie ciężarka o powietrze, zjawiska nieodwracalne zachodzące w silniku dostarczającym pracę do układu).

Ostatecznie więc na sumę przyrostów entropii wszystkich ciał uczestniczących w zjawisku złożą się następujące składniki

$$\pi = \Delta S_u + \Delta S_{zc} + \Delta S_{zm} \quad (5.34)$$

przy czym pozycje ΔS_{zc} i ΔS_{zm} oznaczają sumy przyrostów wszystkich źródeł współpracujących z układem.

Dla procesu ciągłego i ustalonego w czasie nie występuje przyrost entropii układu z tych samych przyczyn, dla których zeruje się przyrost energii układu (patrz rozdz. 4.1). Miarą nieodwracalności zjawiska jest szybkość wzrostu entropii

$$\dot{\pi} = \Delta \dot{S}_{zc} + \Delta \dot{S}_{zm} \quad (5.35)$$

Z warunku ustalonej entropii wynika stałość temperatur źródeł ciepła. Suma szybkości przyrostów entropii źródeł ciepła jest więc równa

$$\Delta \dot{S}_{zc} = - \sum \frac{\dot{Q}_d}{T_d} + \sum \frac{\dot{Q}_w}{T_w} \quad (5.36)$$

Niezmiennie są również parametry czynników dopływających i wypływających z układu, a więc szybkość przyrostu entropii źródeł masy ujmuje zależność

$$\Delta \dot{S}_{zm} = - \sum \dot{m}_d s_d + \sum \dot{m}_w s_w \quad (5.37)$$

Uwzględniając (5.36) i (5.37) w równaniu (5.35) mamy ostatecznie

$$\dot{\pi} = - \sum \frac{\dot{Q}_d}{T_d} + \sum \frac{\dot{Q}_w}{T_w} - \sum \dot{m}_d s_d + \sum \dot{m}_w s_w \quad (5.38)$$

Przez analogię do pierwszej zasady termodynamiki należy zaznaczyć, że również druga zasada termodynamiki sformułowana dla układu o skończonych rozmiarach i dla skończonej przemiany może być stosowana jako warunek konieczny, ale nie wystarczający. Mogłoby bowiem się zdarzyć, że zasada wzrostu entropii nie byłaby spełniona w którejś części układu lub też na którymś odcinku przemiany. Warunkiem koniecznym i dostatecznym jest różniczkowe sformułowanie zasady wzrostu entropii

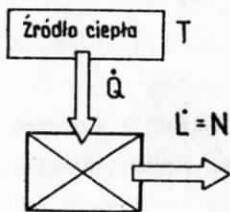
$$d\mathcal{P} > 0 \quad (5.39)$$

dotyczące nieskończenie małego podukładu (rys. 4.4) i nieskończenie krótkiego odcinka przemiany.

5.3. Szczególne przypadki drugiej zasady termodynamiki

5.3.1. Druga zasada w zastosowaniu do silników cieplnych

Niemożliwe jest (nawet w idealnym przypadku) skonstruowanie działającego w sposób ciągły silnika, który zamieniałby w całości na pracę ciepło pobrane ze źródła ciepła (rys. 5.2), czyli tzw. perpetuum mobile II rodzaju.



Rys. 5.2. Perpetuum mobile II rodzaju

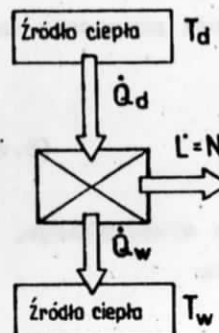
Sformułowanie to było historycznie pierwszym sformułowaniem drugiej zasady termodynamiki, podanym przez Carnota. Dotyczy ono tylko wąskiego wycinka zjawisk cieplnych i dlatego można je traktować jedynie jako szczególny przypadek drugiej zasady termodynamiki. Łatwo bowiem zauważyć, że jest ono zgodne z ogólną zasadą wzrostu entropii, gdyż dla perpetuum mobile II rodzaju suma przyrostów entropii jest równa przyrostowi entropii jedyne go źródła ciepła

$$\mathcal{P} = - \frac{\dot{Q}}{T},$$

a wyrażenie to jest ujemne. Jeżeli całe pobrane ciepło nie może być zamienione na pracę, to oczywiście pozostała jego część musi być wyprowadzona na zewnątrz do innego źródła ciepła (rys. 5.3),

którego entropia w wyniku tego wzrasta.

By wzrost ten nie był mniejszy od ubytku entropii źródła dostarczającego ciepło (dla spełnienia zasady wzrostu entropii), temperatura źródła odbierającego ciepło musi być niższa od temperatury źródła dostarczającego ciepło. Źródło odbierające ciepło nazywane jest dolnym źródłem ciepła (w odróżnieniu od dostarczającego ciepło, górnego źródła ciepła), lub chłodnicą. Najczęściej źródłem tym jest otoczenie, w którym można w dowolnych ilościach lokować bezwartościowe ciepło oddawane przez silnik.



Rys. 5.3. Silnik cieplny

Spełnienie tego warunku narzuconego przez drugą zasadę termodynamiki zauważamy we wszystkich silnikach. Najbardziej rozpowszechnione są silniki, w których zamiana ciepła na pracę odbywa się w wyniku realizacji przemian termodynamicznych określonego czynnika, np. silnik spalinowy, siłownia parowa (elektrownia). Ale również inne silniki działające na odmiennych, pozornie "nietermodynamicznych" zasadach spełniają warunek istnienia dwóch źródeł ciepła o różnych temperaturach. I tak np. ogniwo termoelektryczne posiada tzw. gorące i zimne końce, za pośrednictwem których pobiera i oddaje ciepło do dwu źródeł ciepła.

Stopień zamiany ciepła na pracę w silniku charakteryzujemy sprawnością termiczną silnika

$$\eta = \frac{N}{\dot{Q}_d} \quad (5.40)$$

W myśl pierwszej zasady termodynamiki

$$N = \dot{Q}_d - \dot{Q}_w, \quad (5.41)$$

a więc

$$\eta = 1 - \frac{\dot{Q}_w}{\dot{Q}_d}$$

Z podanego wyżej sformułowania drugiej zasady termodynamiki w odniesieniu do silników wynika, że sprawność termiczna silnika nie może być równa 1. Dla uzyskania bardziej wymiernego warunku zastosujemy zasadę wzrostu entropii, obliczając szybkość przyrostu entropii z równania (5.38)

$$\dot{H} = -\frac{\dot{Q}_d}{T_d} + \frac{\dot{Q}_w}{T_w} \geq 0, \quad (5.42)$$

przy czym znak równości dotyczy idealnego silnika odwracalnego, zwanego silnikiem Carnota. Z warunku (5.42) wynika

$$\frac{\dot{Q}_w}{\dot{Q}_d} \geq \frac{T_w}{T_d}, \quad (5.43)$$

a stąd

$$\eta = 1 - \frac{\dot{Q}_w}{\dot{Q}_d} \leq 1 - \frac{T_w}{T_d} = \eta_{\max}. \quad (5.44)$$

Sprawność silnika rzeczywistego nie może zatem przekroczyć sprawności maksymalnej idealnego silnika Carnota. Ta górna granica sprawności zależy wyłącznie od temperatur źródeł ciepła, nie zależy natomiast od rodzaju procesów zachodzących w silniku.

Górna granica sprawności jest nieosiągalna, bo niemożliwe jest skonstruowanie w pełni odwracalnego silnika Carnota, znajomość jednak tej maksymalnej sprawności i czynników, które na nią wpływają ma duże znaczenie praktyczne. Oceniając jakość rzeczywistego silnika nieodwracalnego winniśmy porównywać jego sprawność nie z liczbą 1, ale ze sprawnością silnika Carnota działającego pomiędzy źródłami ciepła o tych samych temperaturach. Zwiększając górną granicę sprawności stwarzamy możliwości podwyższenia sprawności silników rzeczywistych, a więc powiększenie temperatury źródła ciepła dostarczającego ciepło T_d umożliwi zwiększenie sprawności sil-

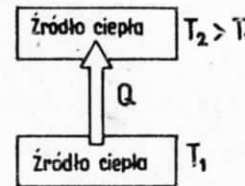
nika rzeczywistego (temperatura dolnego źródła ciepła, którym jest zwykle otoczenie, jeżeli się zmienia, to w sposób od nas niezależny).

5.3.2. Jednokierunkowość samorzutnego przepływu ciepła

Ciepło nie może samorzutnie przepływać w kierunku wyższej temperatury (rys. 5.4). Przyrost entropii takiego zjawiska

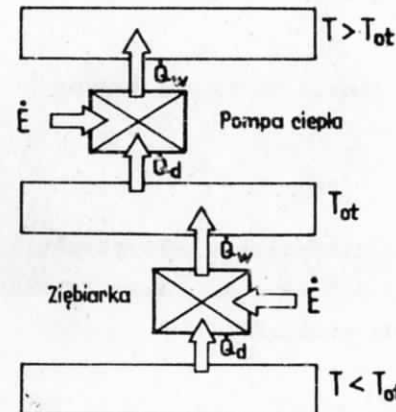
$$\dot{H} = -\frac{Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = \frac{Q(T_1 - T_2)}{T_1 T_2} < 0,$$

co jest sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki. Ciepło może samorzutnie przepływać jedynie w kierunku spadku temperatury ($T_2 < T_1$) i jest to zjawisko tym bardziej nieodwracalne (większe \dot{H}) im większa jest różnica temperatur.



Rys. 5.4. Przepływ ciepła sprzeczny z drugą zasadą termodynamiki

Niemożność samorzutnego przepływu ciepła w kierunku wyższej temperatury nie wyklucza możliwości wymuszonego przepływu, przy użyciu dodatkowej energii napędowej. Urządzenia służące do tego celu (rys. 5.5) dzielą się na:



Rys. 5.5. Ziębiarka i pompa ciepła

a) z i ę b i a r k i transportujące ciepło ze źródła o temperaturze niższej od otoczenia, do otoczenia (np. lodówka). Efektem użytecznym tego typu urządzeń jest ciepło pobierane z dolnego źródła ciepła \dot{Q}_d , a sprawność określa się następująco

$$\varepsilon_z = \frac{\dot{Q}_d}{\dot{E}} \quad (5.45)$$

gdzie \dot{E} jest energią napędową.

b) Pompy ciepła - są to urządzenia służące do transportowania ciepła z otoczenia do źródła o temperaturze wyższej od otoczenia. Urządzenia takie służą do ogrzewania i efektem użytecznym ich działania jest ciepło przetransportowane do pomieszczenia ogrzewanego \dot{Q}_w . Ciepło to jest zawsze większe od zużytej energii napędowej

$$\dot{Q}_w = \dot{E} + \dot{Q}_d,$$

a zatem sprawność tego urządzenia

$$\epsilon_{pc} = \frac{\dot{Q}_w}{\dot{E}} \quad (5.46)$$

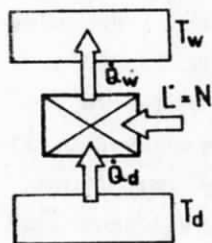
jest zawsze większa od 1.

Ze względu na rodzaj energii napędowej urządzenia do transportu ciepła w kierunku wyższej temperatury dzielimy na:

a) urządzenia napędzane pracą lub równoważną jej energią elektryczną. Przykładami są: lodówka sprężarkowa, lodówka termoelektryczna.

Z drugiej zasady termodynamiki

$$\mathcal{J} = -\frac{\dot{Q}_d}{T_d} + \frac{\dot{Q}_w}{T_w} \geq 0$$



i przy uwzględnieniu pierwszej zasady

$$\dot{Q}_w = \dot{Q}_d + N$$

Rys. 5.6. Ziębiarka lub pompa ciepła napędzana pracą

$$\epsilon_z = \frac{\dot{Q}_d}{N} \leq \frac{T_d}{T_w - T_d} = \epsilon_z \max, \quad (5.47)$$

można określić minimalne zapotrzebowanie mocy napędowej lub też maksymalną sprawność urządzenia. Dla ziębiarki

a dla pompy ciepła

$$\epsilon_{pc} = \frac{\dot{Q}_w}{N} \leq \frac{T_w}{T_w - T_d} = \epsilon_{pc} \max, \quad (5.48)$$

Warto zauważyć, że odwracalna pompa ciepła, czy też ziębiarka jest odwróceniem idealnego silnika (silnika Carnota) działającego pomiędzy tymi samymi źródłami ciepła.

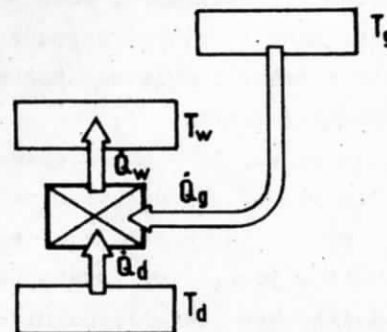
b) urządzenia napędzane ciepłem pochodzącym z dodatkowego źródła ciepła (grzejnika) o temperaturze wyższej od temperatury źródła, do którego pompuje się ciepło (rys. 5.7).

Przykładem takiego urządzenia jest lodówka absorpcyjna, która może być zasilana np. palnikiem gazowym. Z drugiej zasady termodynamiki

$$\mathcal{J} = \frac{\dot{Q}_d}{T_d} + \frac{\dot{Q}_w}{T_w} - \frac{\dot{Q}_g}{T_g}$$

oraz z zasady zachowania energii

$$\dot{Q}_w = \dot{Q}_d + \dot{Q}_g$$



Rys. 5.7. Ziębiarka lub pompa ciepła napędzana ciepłem

można ustalić minimalny strumień ciepła napędowego \dot{Q}_g , lub też maksymalną sprawność urządzenia. Dla ziębiarki

$$\epsilon_z = \frac{\dot{Q}_d}{\dot{Q}_g} \leq \frac{T_d}{T_w - T_d} \frac{T_g - T_w}{T_g} = \epsilon_z \max, \quad (5.49)$$

a dla pompy ciepła

$$\epsilon_{pc} = \frac{\dot{Q}_w}{\dot{Q}_g} \leq \frac{T_w}{T_w - T_d} \frac{T_g - T_d}{T_g} = \epsilon_{pc} \max, \quad (5.50)$$

Idealną (odwracalną) ziębiarkę lub pompę ciepła napędzaną ciepłem można by zastąpić idealnym urządzeniem napędzanym pracą, przy czym praca byłaby uzyskiwana w idealnym silniku zasilanym ciepłem \dot{Q}_g i oddającym ciepło odpadowe źródłu o temperaturze T_w dla układu ziębiarki i źródła o temperaturze T_g dla przypadku pompy ciepła. A zatem sprawność idealnej ziębiarki lub pompy ciepła napędzanej ciepłem jest iloczynem sprawności idealnego urządzenia napędzanego pracą i sprawności idealnego silnika, co potwierdzają prawe strony nierówności (5.49) i (5.50).

5.4. Skutki nieodwracalności zjawisk

Celem drugiej zasady termodynamiki jest nie tylko wykrywanie kierunku przebiegu zjawisk i precyzowanie dodatkowych, obok pierwszej zasady, warunków jakie muszą spełniać zjawiska. Zajmuje się ona również skutkami nieodwracalności zjawisk i daje wskazówki - jak realizować najkorzystniejsze przemiany odwracalne.

Obserwacja różnych zjawisk wskazuje na to, że nieodwracalność dowolnego zjawiska powoduje stratę pracy. Np. nieodwracalny silnik cieplny z tej samej ilości pobranego ciepła wykonuje mniejszą pracę. Różnica stanowi stratę pracy, tzn. pracę nieuzyskaną, którą w zjawisku odwracalnym można było uzyskać bez dodatkowych nakładów energii napędowej. Oczywiście nie jest to strata w sensie pierwszej zasady termodynamiki, bo ciepło nie zamienione na pracę, stanowiąc tę właśnie stratę, wędruje do dolnego źródła ciepła i jeżeli źródłem tym jest otoczenie, staje się energią bezwartościową. Podobnie nieodwracalna ziębiarka dla tego samego efektu ziębienia, wyrażonego ciepłem \dot{Q}_d , zużywa więcej pracy od ziębiarki rzeczywistej. Ta dodatkowo zużyta praca nie ginie lecz w postaci dodatkowego ciepła dopływa do górnego źródła ciepła, którym jest otoczenie, a więc przeradza się w bezużyteczną energię. Gaz płynący rurociągiem podlega nieodwracalnej przemianie tarcia, w wyniku której ciśnienie jego spada bez wykonania pracy. Gdyby gaz rozprężył się odwracalnie (np. izotermicznie, pobierając przy tym ciepło z otoczenia), to wykonałby pracę. W wyniku nieodwracalności ponosimy

zatem stratę pracy. Powyższe spostrzeżenia można uogólnić następująco:

Jeżeli zjawisko, w którym praca jest wykonywana, lub mogłaby być wykonywana przebiega odwracalnie, to uzyskana praca jest maksymalna L_{max} . W rzeczywistym zjawisku nieodwracalnym^{x)} praca wykonana jest mniejsza $L < L_{max}$ (w szczególności może być zerem). Różnica jest stratą pracy

$$\Delta L = L_{max} - L.$$

Jeżeli natomiast zjawisko, przy którym praca jest wkładana przebiega odwracalnie, to włożona praca jest najmniejsza L_{min} . Przy realizacji rzeczywistego zjawiska nieodwracalnego praca włożona jest większa $L > L_{min}$. Różnica

$$\Delta L = L - L_{min}$$

jest stratą pracy.

Ilościowy związek pomiędzy stratą pracy spowodowaną nieodwracalnością, a miarą tej nieodwracalności, podaje prawo Gouy'a-Stodoli

$$\Delta L = \int T_{ot} \cdot \quad (5.51)$$

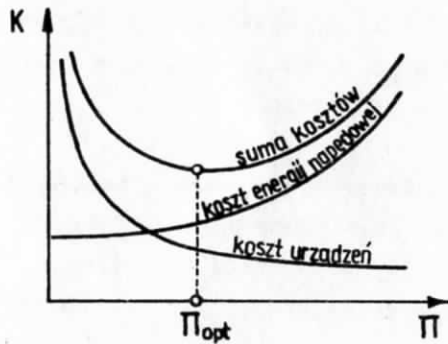
lub dla straty mocy

$$\Delta N = \int \dot{T} T_{ot} \cdot \quad (5.52)$$

W równaniach powyższych T_{ot} oznacza temperaturę otoczenia. Projektując lepiej jakiegokolwiek urządzenie tak, by realizowało bardziej

^{x)} Dla ścisłości należy zaznaczyć, że oba zjawiska, tzn. rzeczywiste nieodwracalne i porównawcze idealne, muszą mieć te same stany początkowe i końcowe układu i pobierać z tych samych źródeł ciepła i masy te same ilości energii o tych samych parametrach, z wyjątkiem otoczenia, z którego można pobierać bezpłacie dodatkowe ciepło.

odwracalne procesy, zyskujemy dodatkową pracę - w sensie pracy rzeczywiście dodatkowo uzyskanej lub w sensie pracy nie zużytej. W obu wypadkach gdyby ta dodatkowa praca nie była zaoszczędzona, to trzeba by ją było uzyskać kosztem pewnych nakładów energii pierwotnych (paliwa). Im więc bardziej odwracalny proces, tym mniejsze zużycie energii pierwotnych dla jego realizacji, tym mniejsze koszty eksploatacji. Wiadome jest jednak, że im bardziej doskonałe urządzenie, realizujące bardziej odwracalne procesy, tym większe są jego koszty. Koszt urządzenia odwracalnego byłby nieskończenie duży. Te dwa składniki kosztów obarczających końcowy efekt, czy też produkt danego urządzenia zmieniają się więc w kierunkach przeciwnych (rys. 5.8).



Rys. 5.8. Optymalna nieodwracalność procesu

Istnieje zatem optymalny przebieg procesu nieodwracalnego, którego nie warto już ulepszać w kierunku większej odwracalności. Można tu zilustrować na podanym już wyżej przykładzie przepływu gazu w rurociągu. Nieodwracalne zjawisko spadku ciśnienia w rurociągu zmusza do nakładu energii na sprężanie gazu. Spadek ciśnienia na tym samym odcinku rurociągu zależy od prędkości przepływu gazu. Ażeby zmniejszyć prędkość, należy zwiększyć średnicę rurociągu. Zwiększając więc średnicę rurociągu zmniejszamy koszt energii na sprężanie gazu, rośnie jednak koszt rurociągu. Istnieje zatem optymalna prędkość przepływu gazu w rurociągu i odpowiadająca jej (dla danego natężenia przepływu \dot{m}) średnica rurociągu, przy której nieodwracalność zjawiska jest optymalna. Ta optymalna prędkość przepływu nie jest czymś uniwersalnym. Zależy ona np. od ciśnienia i temperatury gazu, gdyż od tych danych zależy grubość ścianki rurociągu i rodzaj materiału, z którego rurociąg jest wykonany. Im wyższe te para-

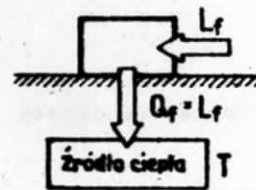
metry, tym wyższa jest optymalna prędkość przepływu, gdyż wówczas wyższy jest koszt rurociągu w stosunku do kosztu energii na przetłaczanie gazu.

5.5. Elementy nieodwracalności zjawisk

W każdym złożonym zjawisku nieodwracalnym można wyodrębnić elementarne składniki tej nieodwracalności.

5.5.1. Tarcie

Tarcie jest zjawiskiem nieodwracalnym polegającym na zamianie pracy na ciepło. Na rys. 5.9 pokazano tarcie ciał stałych, ale występuje ono również w cieczach i gazach, gdzie jest spowodowane ich lepkością. W przypadku tarcia ciał stałych nieodwracalność zjawiska tarcia zależy od temperatury źródła, do którego przepłynęło ciepło tarcia



Rys. 5.9. Nieodwracalność zjawiska tarcia

Jeżeli $T > T_{ot}$, to część tego ciepła można odzyskać na pracę, gdyż strata pracy

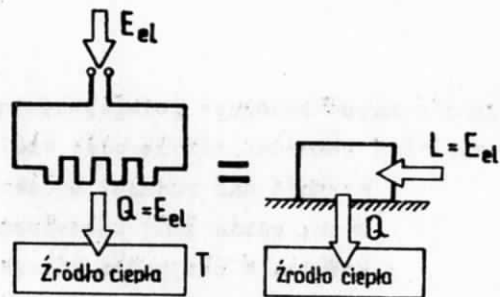
$$\eta = \frac{Q_f}{T} = \frac{L_f}{T} \quad (5.53)$$

jest mniejsza od pracy tarcia L_f . Natomiast gdy ciepło tarcia przepływnie do otoczenia, to praca tarcia została w całości bezpowrotnie stracona $\Delta L = L_f$. Zjawiskiem równoważnym jest zamiana energii elektrycznej na ciepło (rys. 5.10), gdyż energia elektryczna jest równoważna pracy.

$$\Delta L = \eta T_{ot} = L_f \frac{T_{ot}}{T}$$

W przypadku tarcia w gazie praca tarcia pochodzi z rozprężania esynnika i po zamianie na ciepło powraca do czynnika. W wyniku tarcia przy takim samym rozprężeniu jak przy przemianie bestarciowej,

otrzymujemy mniejszą pracę (równ. 4.19)). Przy pomocy tej pracy nie można by było sprężyć gazu do stanu początkowego, trzeba by w tym celu dołożyć dodatkową pracę, która przy rozprężeniu została zużyta na tarcie.



Rys. 5.10. Nieodwracalność zamiany energii elektrycznej na ciepło

Praca tarcia L_f może pozostawać w różnym stosunku do pracy bezwzględnej oddanej na zewnątrz. W skrajnie nieodwracalnym przypadku praca bezwzględna jest równa zeru i gaz rozpręża się nie wykonując żadnej pracy. Taka przemiana nazywa się dławieniem (patrz rozdz. 6.6).

5.5.2. Przepływ ciepła w kierunku spadku temperatury

Przepływ ciepła w kierunku spadku temperatury jest zjawiskiem nieodwracalnym, gdyż samorzutnie nie może przebiec w kierunku przeciwnym, a jego odwrócenie wymaga zużycia dodatkowej energii napędowej. Przyrost entropii spowodowany nieodwracalnym przepływem ciepła jest następujący

$$\pi = -\frac{Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = Q \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2}, \quad (5.54)$$

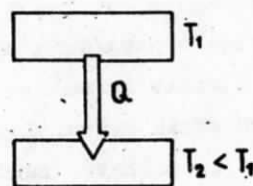
a strata pracy

$$\Delta I = Q \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} T_{ot}. \quad (5.55)$$

Jeżeli ciepło przepływa do otoczenia ($T_2 = T_{ot}$), to wówczas strata pracy

$$\Delta L = Q \frac{T_1 - T_{ot}}{T_1},$$

a więc równa się pracy silnika Carnota działającego pomiędzy źródłami ciepła o temperaturach T_1 i T_{ot} .



Rys. 5.11. Nieodwracalność przepływu ciepła

5.5.3. Mieszanie (dyfuzja)

Jeżeli dwa różne gazy skontaktujemy ze sobą, to nastąpi samorzutny proces mieszania się (dyfuzji) polegający na wzajemnym przenikaniu cząstek jednego gazu do przestrzeni zajmowanej przez drugi gaz. Każdy ze składników zmniejsza przy tym swoje ciśnienie, a więc zwiększa swoją entropię. Suma entropii obu gazów rośnie. Dyfuzja trwa tak długo, dopóki nie nastąpi wyrównanie się ciśnień cząstkowych każdego ze składników w całej objętości mieszaniny, a wystąpi również wtedy, gdy pojawi się różnica ciśnień cząstkowych któregośkolwiek ze składników. Proces rozdziału mieszaniny na składniki lub chociażby zróżnicowania ciśnień cząstkowych, samorzutnie zajść nie może. Rozdzielenie mieszaniny gazów, lub też zagęszczenie w niej jednego ze składników jest możliwe, wymaga jednak zaangażowania specjalnych urządzeń pobierających pracę.

5.5.4. Spontaniczne reakcje chemiczne

Spontaniczne reakcje chemiczne są reakcjami nieodwracalnymi i to tym bardziej nieodwracalnymi im gwałtowniejszy jest ich przebieg. Przykładem jest reakcja spalania. Wiadomo też, że reakcji tej nie da się tą samą drogą odwrócić. Wyznaczenie przyrostu entropii

pii wynikającego z reakcji chemicznej wymaga obliczenia entropii bezwzględnych substancji uczestniczących w reakcji, tzn. wyznaczenia wartości s_0 w równaniach (5.9) lub (5.13).

5.6. Sposoby zmniejszania nieodwracalności zjawisk

Najskuteczniejszym sposobem zmniejszenia nieodwracalności spowodowanej tarciami jest ograniczenie tego zjawiska. W przypadku tarcia ciał stałych uzyskuje się to przez odpowiednią obróbkę i smarowanie powierzchni trących. Tarcie w gazie ogranicza się przez zmniejszenie szybkości przepływu, odpowiednie wyprofilowanie kanału, którym płynie gaz (dla uniknięcia szkodliwych zawiruszeń). Przy przemianach gazu tarcie jest tym mniejsze, im powolniejsza jest przemiana.

Nieodwracalności spowodowanej przepływem ciepła na ogół nie da się ograniczyć przez zmniejszenie ilości przepływającego ciepła, gdyż wielkość ta jest narzucona określonymi względami technologicznymi. Jak wynika z równania (5.54) przyrost entropii spowodowany przepływem ciepła można zmniejszyć, nie zmieniając ilości samego ciepła, przez zmniejszenie różnicy temperatur. Przepływ ciepła byłby odwracalny, gdyby różnica ta była nieskończenie mała. Intensywność przepływu ciepła zależy od różnicy temperatur ciał przekazujących sobie ciepło i od powierzchni ich kontaktu. Zmniejszając różnicę temperatur (zmniejszenie nieodwracalności) zwiększamy powierzchnię wymiany ciepła, a więc i koszt urządzeń służących do przekazywania ciepła (wymenników ciepła), co potwierdza ogólne prawidłowości przedstawione w rozdziale 5.4.

Nieodwracalność zjawiska dyfuzji można zmniejszyć stosując tzw. przegrody półprzepuszczalne (selektywne) przepuszczające cząstki tylko jednego gazu.

Również i reakcje chemiczne można uczynić bardziej odwracalnymi. Np. reakcja utleniania paliwa w tzw. ogniwach paliwowych przebiega bardziej korzystnie niż zwykła reakcja spalania.

5.7. Egzergia

Wygodnym i poglądowym narzędziem analizy zjawisk termodynamicznych jest egzergia. Dzięki temu pojęciu znajdujemy wspólny mianownik dla różnych form występowania energii i dla różnych sposobów przekazywania energii. Najwyższą, najbardziej wartościową formą energii jest energia mechaniczna, a najwartościowszym sposobem przekazywania energii jest praca.

Maksymalną pracę użyteczną jaką w danych warunkach otoczenia można uzyskać z określonego czynnika termodynamicznego lub określonego strumienia energii, nazywamy egzergią.

Egzergia jest więc tym, co nazywa się zdolnością do wykonania pracy.

W wyniku zachodzenia zjawisk nieodwracalnych maleje wartość energii, maleje egzergia. Wykonując zatem bilans egzergii dla pewnego zjawiska (na wzór bilansu energii) stwierdzamy niedobór egzergii, który zamykamy stratą egzergii ΔB

$$B_d = \Delta B_u + B_w + \Delta B. \quad (5.56)$$

W równaniu tym B_d i B_w oznaczają egzergie dostarczone i wyprowadzone z układu, natomiast $\Delta B_u = B_{u2} - B_{u1}$ przyrost egzergii układu. Strata egzergii ΔB jest równa stracie pracy spowodowanej nieodwracalnością (równ. (5.51)).

$$\Delta B = \int T_{ot} \cdot \quad (5.57)$$

Dla zjawisk ciągłych i ustalonych nie występuje przyrost egzergii układu i równanie bilansu egzergii ma postać

$$\dot{B}_d = \dot{B}_w + \Delta \dot{B}, \quad (5.58)$$

gdzie

$$\Delta \dot{B} = \int \dot{T}_{ot} \cdot \quad (5.59)$$

Egzergię układu obliczamy z równania

$$B_u = m(b_u + \frac{w^2}{2} + gh), \quad (5.60)$$

w którym egzergia właściwa układu

$$b_u = u - u_{ot} - T_{ot}(s - s_{ot}) + p_{ot}^*(v - v_{ot}). \quad (5.61)$$

W równaniu (5.61) T_{ot} jest temperaturą otoczenia, a u_{ot} , s_{ot} , v_{ot} - parametrami wyznaczonymi dla stanu równowagi czynnika z otoczeniem.

Egzergia przekazywana z pracą równa się pracy

$$B_L = L, \quad (5.62)$$

a strumień egzergii

$$\dot{B}_L = N. \quad (5.63)$$

Egzergia przekazywana ze strugą czynnika

$$B_s = m(b_s + \frac{w^2}{2} + gh), \quad (5.64)$$

a dla ciągłego przepływu

$$\dot{B}_s = \dot{m}(b_s + \frac{w^2}{2} + gh), \quad (5.65)$$

gdzie egzergia właściwa strugi

$$b_s = i - i_{ot} - T_{ot}(s - s_{ot}). \quad (5.66)$$

Egzergia przekazana z ciepłem Q pobranym ze źródła o temperaturze $T_{zc} = \text{idem}$

$$B_Q = Q \frac{T_{zc} - T_{ot}}{T_{zc}} \quad (5.67)$$

i analogicznie dla strumienia ciepła

$$\dot{B}_Q = \dot{Q} \frac{T_{zc} - T_{ot}}{T_{zc}}. \quad (5.68)$$

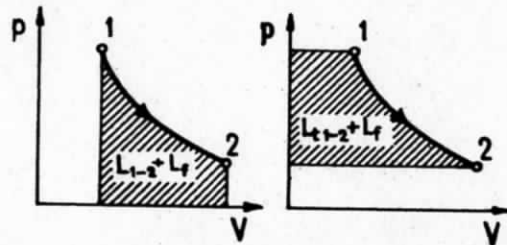
Jeżeli źródło ciepła pobiera ciepło, w równaniach (5.67) i (5.68) należy zmienić znak na przeciwny.

R o z d z i a ł 6

TYPOWE PRZEMIANY CZYNNIKA TERMODYNOMICZNEGO

Pojęcie przemiany termodynamicznej i ogólny podział przemian omówiliśmy w rozdziale 3. Rozdziały 4 i 5 były poświęcone prawom rządzącym przemianami, tj. pierwszej i drugiej zasadzie termodynamiki. Poniżej będą omówione najbardziej typowe przemiany czynnika termodynamicznego, tj. izobara, izochora, izoterma, adiabata, politropa i dławienie. Dla każdej z przemian będą podane ogólne zależności, wynikające z podstawowych praw termodynamiki, a następnie zależności te zostaną skonkretyzowane dla gazu doskonałego i półdoskonałego. Dla każdej z przemian będziemy najpierw poszukiwać związku pomiędzy parametrami termicznymi, a potem równań do obliczenia pracy i ciepła.

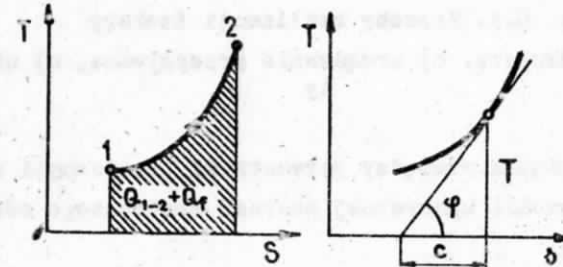
Przemiany będą przedstawiane na wykresach stanu czynnika. Jednym z nich jest wykres p-v, lub też dla masy m kg wykres p-V. Na wykresie p-V pola przedstawiają prace (rys. 6.1) - pole pomiędzy linią przemianową a osią V pracę bezwzględną przemiany powiększoną o pracę tarcia, pole pomiędzy linią przemiany a osią p pracę techniczną powiększoną o pracę tarcia. Dla przemian beztarciowych $L_f = 0$ i pola te w całości wyrażają prace L_{1-2} i L_{t1-2} .



Rys. 6.1. Praca na wykresie p-V

Innym wykresem stanu czynnika jest wykres T-s, a dla masy m kg wykres T-S. Jak wynika z definicji entropii, pole pod linią przemiany na wykresie T-S przedstawia ciepło całkowite, będące sumą ciepła dostarczonego z zewnątrz i ciepła tarcia (rys. 6.2a)

$$Q_{c1-2} = Q_{1-2} + Q_f = \int_{S_1}^{S_2} T ds. \quad (6.1)$$



Rys. 6.2. Ciepło właściwe i ciepło dostarczone na wykresie T-S

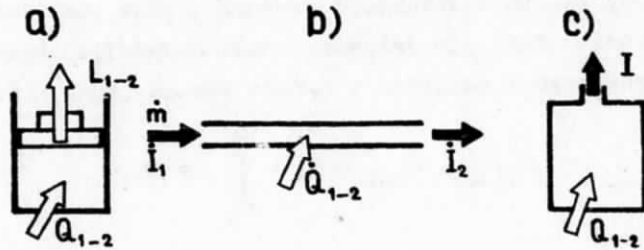
Ciepło to jest dodatnie, gdy przemiana przebiega w kierunku wzrostu entropii, a ujemne gdy w kierunku spadku entropii. Dla przemian beztarciowych $Q_f = 0$ i całe pole pod linią przemiany przedstawia ciepło dostarczone Q_{1-2} . Wówczas podstyczna pod linią przemiany na wykresie T-s jest ciepłem właściwym czynnika w danym punkcie przemiany. Wynika to z następującego przeliczenia

$$c = \frac{dq}{dT} = \frac{T ds}{dT} = \frac{T}{\frac{dT}{ds}} = \frac{T}{\operatorname{tg} \varphi}$$

Używane są również inne wykresy stanu: i-s, p-i. Wykresy te są stosowane przede wszystkim dla pary i będą omówione w rozdziale 8.

6.1. Izobara

Izobara jest przemianą, podczas której ciśnienie czynnika nie zmienia się. $p = \text{idem}$. Sposoby realizacji izobary pokazano na rys. 6.3.



Rys. 6.3. Sposoby realizacji izobary

a) urządzenie zamknięte, b) urządzenie przepływowe, c) układ otwarty

Znalezienie związku pomiędzy parametrami termicznymi nie jest możliwe bez znajomości konkretnej postaci termicznego równania stanu.

Pracę bezwzględną przemiany zamkniętej (rys. 6.3a) wyraża równanie

$$L_{1-2} = p(V_2 - V_1), \quad (6.2)$$

wynikające z obliczenia całki (4.17) przy $p = \text{idem}$. Przy izobarycznym przepływie (rys. 6.3b) praca techniczna jest równa 0

$$L_{t1-2} = 0 \quad (6.3)$$

zgodnie z równaniem (4.27). Warto tu przy okazji zauważyć, że jeżeli przemiana ma być w pełni izobaryczna, musi być beztarciowa (tarcie powoduje spadek ciśnienia). Stąd też przyjęcie we wzorach na pracę $L_f = 0$.

W przypadku przemiany otwartej praca bezwzględna $L_{1-2} = 0$, bo $dV = 0$. Ekspandujący w zbiorniku gaz wykonuje jedynie pracę wytłaczania nie mieszczącej się w zbiorniku nadwyżki gazu poza zbiornik, ale ta praca przetłaczania tkwi w entalpii gazu wypływającego.

Ciepło dostarczone do gazu podczas zamkniętej przemiany izobarycznej (rys. 6.3a) oblicza się z równania bilansu (4.57), przy uwzględnieniu (6.2)

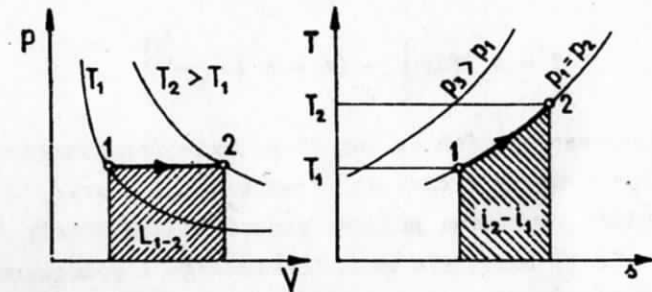
$$Q_{1-2} = U_2 - U_1 + L_{1-2} = U_2 - U_1 + pV_2 - pV_1 = (U_2 + pV_2) - (U_1 + pV_1)$$

$$Q_{1-2} = I_2 - I_1 = m(i_2 - i_1). \quad (6.4)$$

Podobnie dla przepływu izobarycznego (rys. 6.3b)

$$\dot{Q}_{1-2} = \dot{m}(i_2 - i_1), \quad (6.5)$$

na mocy równania (4.66). Równanie (6.5) obowiązuje również dla przepływów nieizobarycznych (z tarcie). Na rys. 6.4 przedstawiono przebieg przemiany izobarycznej na wykresach $p-V$ i $T-s$.



Rys. 6.4. Przemiana izobaryczna

Dla gazu doskonałego i półdoskonałego z równania Clapeyrona wynika

$$\frac{v}{T} = \frac{R}{p} = \text{idem}, \quad (6.6)$$

lub

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (6.7)$$

Równania (6.6) i (6.7) obowiązują dla wszystkich trzech sposobów realizacji izobary przedstawionych na rys. 6.3. Dla przemiany zamkniętej (rys. 6.3a) $m = \text{idem}$ i dlatego

$$\frac{V}{T} = \text{idem} \quad (6.8)$$

oraz

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (6.9)$$

Dla urządzenia przepływowego (rys. 6.3b) $\dot{m} = \text{idem}$, co po skojarzeniu z równaniami (6.6) i (6.7) daje

$$\frac{\dot{V}}{T} = \text{idem}, \quad (6.10)$$

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (6.11)$$

Na wykresie T-s izobara gazu doskonałego jest linią wykładniczą, co wynika z rozwikłania równania (5.18) względem T

$$T = T_0 \exp \left[\frac{1}{c_p} \left(s + R \ln \frac{p}{p_0} \right) \right]$$

Izobary o różnych wartościach p są równoległe przesunięte w poziomie, przy czym izobary wyższe są przesunięte w lewo.

Pracę bezwzględną wykonaną podczas zamkniętej przemiany izobarycznej (równ. (6.2)) można dla gazu doskonałego i półdoskonałego wyrazić również równaniem

$$L_{1-2} = mR(T_2 - T_1) \quad (6.12)$$

wynikającym z zastosowania równania Clapeyrona.

Stosując kaloryczne równanie stanu gazów doskonałych i półdoskonałych (równania (4.86)-(4.92)) można w miejsce równań (6.4) i (6.5) napisać:

Dla gazu doskonałego

$$Q_{1-2} = m c_p (T_2 - T_1) = n(Mc_p)(T_2 - T_1), \quad (6.13)$$

$$\dot{Q}_{1-2} = \dot{m} c_p (T_2 - T_1) = \dot{n}(Mc_p)(T_2 - T_1). \quad (6.14)$$

a dla gazu półdoskonałego te same równania, lecz ze średnim ciepłem właściwym $c_p \left|_{T_1}^{T_2}$ lub $(Mc_p) \left|_{T_1}^{T_2}$.

6.2. Izochora

Izochora jest przemianą, podczas której objętość właściwa jest niezmienna $v = \text{idem}$, co jest równoznaczne z niezmiennością gęstości $\rho = \text{idem}$. Praktycznie jedynym sposobem realizacji tej przemiany jest przemiana zamknięta $m = \text{idem}$ w zbiorniku o stałej objętości $V = \text{idem}$ *).

Praca bezwzględna przemiany izochorycznej

$$L_{1-2} = 0, \quad (6.15)$$

co wynika z niezmienności objętości $dV = 0$. Praca techniczna natomiast

$$L_{t1-2} = - \int_{p_1}^{p_2} V dp = - V \int_{p_1}^{p_2} dp,$$

$$L_{t1-2} = V(p_1 - p_2). \quad (6.16)$$

Praca techniczna, jak wiadomo, ma sens w maszynie przepływowej, w której jest realizowana dana przemiana. Przemiana izochoryczna jest dobrą aproksymacją przemiany cieczy, którą można traktować jak nieściśliwą. Obliczając więc moc napędową p o m p y możemy wykorzystać równanie (6.16)

$$N_p = - \dot{L}_{t1-2} = \dot{V}(p_2 - p_1). \quad (6.17)$$

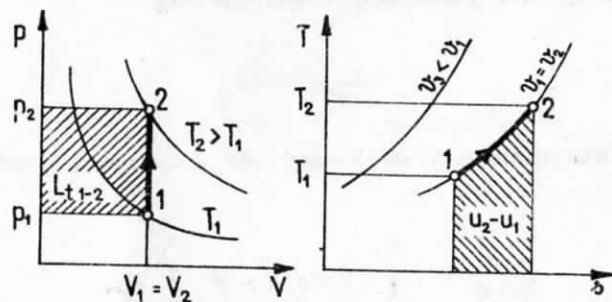
* Można by wskazać na inne sposoby realizacji przemiany v-idem, np. przepływ w rurociągu ze spadkiem ciśnienia spowodowanym tarciami i jednoczesnym odbieraniem ciepła w takiej ilości, by utrzymać stałość objętości właściwej. Praktycznie nie ma to jednak znaczenia.

Równanie to jest również stosowane do przybliżonego wyznaczania mocy napędowej sprężarek adiabatycznych dających niewielki przyrost ciśnienia w stosunku do samego ciśnienia $p_2 - p_1 \ll p_1$. Sprężarki wirnikowe spełniające ten warunek są nazywane wentylatorami.

Ciepło dostarczone podczas zamkniętej przemiany izochorycznej można obliczyć z równania bilansu (4.57), przy uwzględnieniu (6.15)

$$Q_{1-2} = U_2 - U_1 = m(u_2 - u_1). \quad (6.18)$$

Na rys. 6.5 przedstawiono przebieg przemiany izochorycznej na wykresach p-V i T-s.



Rys. 6.5. Przemiana izochoryczna

Na wykresie T-s izochora jest zawsze bardziej stroma od izobary, gdyż zawsze $c_p > c_v$, a ciepła właściwe są podstycznymi (rys. 6.2b).

Dla gazu doskonałego i półdoskonałego z równania Clapeyrona wynika

$$\frac{p}{T} = \frac{R}{v} = \text{idem}, \quad (6.19)$$

lub

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (6.20)$$

Równanie Clapeyrona umożliwia również napisanie innej postaci wzoru (6.16) na pracę

$$L_{t1-2} = mR(T_1 - T_2). \quad (6.21)$$

Dla dalszego rozwinięcia równania (6.18) na ciepło dostarczone należy wykorzystać kaloryczne równania stanu (4.86)-(4.93) gazów doskonałych i półdoskonałych.

Dla gazu doskonałego

$$Q_{1-2} = mc_v(T_2 - T_1) = n(Mc_v)(T_2 - T_1), \quad (6.22)$$

a dla gazu półdoskonałego

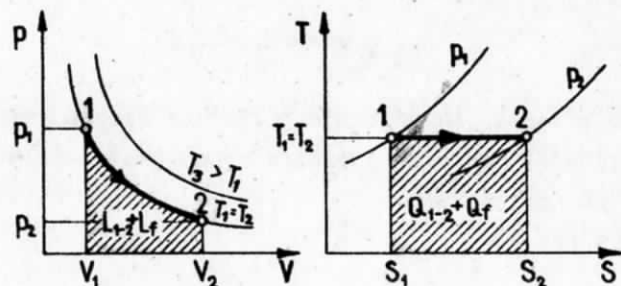
$$Q_{1-2} = mc_v \int_{T_1}^{T_2} (T_2 - T_1) = n(Mc_v) \int_{T_1}^{T_2} (T_2 - T_1). \quad (6.23)$$

Wychodząc ze wzoru na entropię właściwą gazu doskonałego w funkcji temperatury i objętości właściwej (równ. (5.20)) można, podobnie jak dla izobary, wykazać że temperatura jest wykładniczą funkcją entropii właściwej i że poszczególne izochory są równoległe przesunięte w poziomie, przy czym wyższe izochory leżą na prawo (rys. 6.5).

6.3. Izoterma

Izoterma jest przemianą, podczas której temperatura czynnika jest niezmienna, $T = \text{idem}$, zmienia się natomiast ciśnienie i objętość właściwa. Podanie związku pomiędzy tymi parametrami jest możliwe przy znajomości termicznego równania stanu, a zależność $p = p(v)$ uwarunkowuje z kolei obliczenia pracy przemiany. Możliwe jest natomiast podanie ogólnego równania na ciepło dostarczone podczas przemiany izotermicznej. Wynika ono z równania (6.1), po uwzględnieniu $T = \text{idem}$.

$$Q_{1-2} + Q_f = T(S_2 - S_1) = m T(s_2 - s_1). \quad (6.24)$$



Rys. 6.6. Przemiana izotermiczna

Dla gazu doskonałego i półdoskonałego z równania Clapeyrona wynika związek pomiędzy ciśnieniem i objętością (przy $m = \text{idem}$)

$$pV = p_1 V_1 = \text{idem} \quad (6.25)$$

zwany równaniem przemiany. Z równania (6.25) wynika również

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} \quad (6.26)$$

Wstawiając (6.25) do wzoru na pracę (4.17) otrzymamy dla izotermicznej przemiany odwracalnej lub pseudoodwracalnej ($L_f = 0$)

$$L_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1}{V} \, dV = p_1 V_1 \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

a po uwzględnieniu (6.26)

$$L_{1-2} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (6.27)$$

Z definicji pracy technicznej (4.23), po uwzględnieniu $p_1 V_1 = p_2 V_2$ otrzymujemy

$$L_{t1-2} = L_{1-2} \quad (6.28)$$

Ciepło dostarczone podczas odwracalnej lub pseudoodwracalnej przemiany gazu doskonałego czy też półdoskonałego można obliczyć z równania (6.24) albo z równania bilansu (4.57). Ze stałości temperatury wynika (przy stałej masie) stałość energii wewnętrznej $U_1 = U_2$, a zatem

$$Q_{1-2} = L_{1-2} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (6.29)$$

Jeżeli izoterma gazu doskonałego lub półdoskonałego jest realizowana w maszynie przepływowej, to wówczas

$$p\dot{V} = \text{idem}, \quad (6.30)$$

lub

$$p_1 \dot{V}_1 = p_2 \dot{V}_2 \quad (6.31)$$

Moc uzyskana $N_1 = \dot{L}_{t1-2}$ jest na podstawie bilansu (4.66) równa dostarczanemu ciepłu \dot{Q}_{1-2}

$$N_1 = \dot{Q}_{1-2},$$

gdyż $\dot{i}_2 - \dot{i}_1 = \dot{m}(i_2 - i_1) = 0$ na podstawie $T_2 = T_1$. Jeżeli ponadto przemiana ta jest odwracalna lub pseudoodwracalna, to

$$N_1 = \dot{Q}_{1-2} = p_1 \dot{V}_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (6.32)$$

W przypadku sprężania izotermicznego z wzoru (6.32) po zmianie znaku na przeciwny, można wyznaczyć moc napędową sprężarki i strumień ciepła odbieranego.

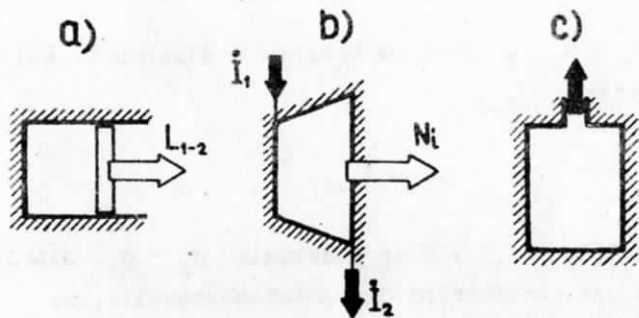
6.4. Adiabata

Adiabata jest przemianą, podczas której czynnik zmienia swój stan bez wymiany ciepła

$$dq = 0.$$

Przemianę adiabaticzną można realizować w układzie zamkniętym (rys. 6.7a), w maszynie przepływowej (rys. 6.7b), a rozprężanie adiabaticzne również przy wyładowaniu zaizolowanego zbiornika (przemiana otwarta). Izolacja układu, w którym przebiega przemiana nigdy nie jest idealna, ale też nawet gdy wogóle jej nie ma niejednokrotnie przemianę rzeczywistą można traktować jak adiabaticzną, gdy dzięki szybkiemu przebiegowi przemiany, ilość wymienianego ciepła jest znacznie mniejsza od zmiany energii czynnika; dla przypadku a

$$|Q_{1-2}| \ll |L_{1-2}|,$$



Rys. 6.7. Sposoby realizacji adiabaty

a) układ zamknięty, b) maszyna przepływowa, c) wypływ ze zbiornika

dla przypadku b

$$|\dot{Q}_{1-2}| \ll |N|,$$

a dla przypadku c

$$|dq| \ll |di|.$$

Pracę wykonaną podczas przemiany adiabaticznej oblicza się z bilansu energii. Dla układu zamkniętego (przyp. a) z równ. (4.57)

$$L_{1-2} = U_1 - U_2 = m(u_1 - u_2). \quad (6.33)$$

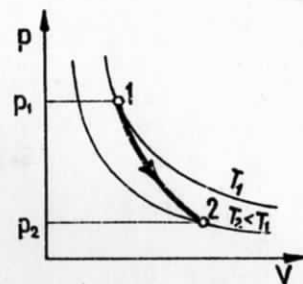
a dla maszyny przepływowej (przyp. b)

$$N_i = \dot{L}_{t1-2} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \dot{m}(i_1 - i_2). \quad (6.34)$$

Praca jest więc przy rozprężaniu wykonywana kosztem energii gazu, w wyniku czego spada nie tylko ciśnienie, ale i temperatura (rys. 6.8).

Z drugiej zasady termodynamiki wynika, że

$$ds = \frac{dq + dq_f}{T} = \frac{dq_f}{T} \geq 0 \quad (6.35)$$

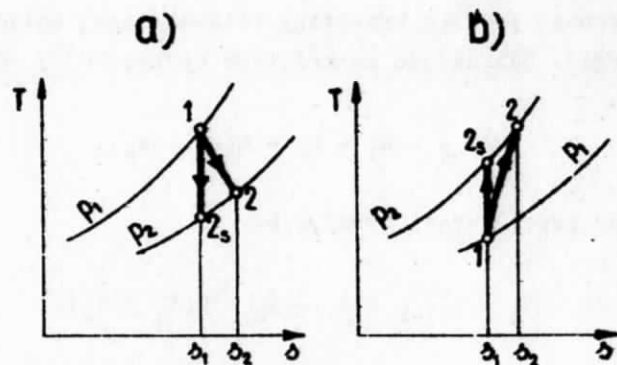


Rys. 6.8. Adiabata na wykresie p-V

gdyż ciepło tarcia jest nieujemne. Entropia podczas przemiany adiabaticznej nie maleje. Dla adiabaty odwracalnej $dq_f = 0$ i $ds = 0$, a więc $s = \text{idem}$, stąd jej nazwa - i z e n t r o p a. Odwracalne i nieodwracalne przemiany adiabaticzne o tym samym stanie początkowym i wspólnym końcowym ciśnieniu przedstawiono na wykresie T-s, na rys. 6.9. Na wykresach tych, jak i w dalszych rozważaniach indeks s dotyczy adiabaty odwracalnej.

Widoczne jest, że wskutek nieodwracalności adiabaty praca uzyskana przy rozprężaniu jest mniejsza niż podczas przemiany odwracalnej, a przy sprężaniu adiabaticznym nieodwracalnym zużywa się więcej pracy niż w przypadku odwracalnym. Stopień nieodwracalności

adiabaty przebiegającej w maszynie przepływowej charakteryzuje się za pomocą sprawności wewnętrznej maszyny, będącej stosunkiem odpowiednich prac technicznych.



Rys. 6.9. Adiabata odwracalna 1-2_s i nieodwracalna 1-2:
a) rozprężanie, b) sprężanie

Dla maszyn rozprężających (np. turbina)

$$\eta_i = \frac{H_i}{H_{is}} = \frac{i_1 - i_2}{i_1 - i_{2s}} \quad (6.36)$$

a dla sprężarek

$$\eta_i = \frac{H_{is}}{H_i} = \frac{i_{2s} - i_1}{i_2 - i_1} \quad (6.37)$$

Znając sprawność wewnętrzną η_i umożliwia wyznaczenie parametrów końcowych przemiany adiabatycznej nieodwracalnej, gdy dane są parametry początkowe i końcowe ciśnienie.

Wyznaczenie związków określających współzależność parametrów termicznych T, p, v podczas przemiany adiabatycznej jest możliwe dla adiabaty odwracalnej gazu doskonałego. Wyciągamy z uniwersalnego równania bilansu (4.63), kładąc w nim $dq = 0$ (adiabata) i $dq_f = 0$ (odwracalna)

$$du + p dv = 0. \quad (6.38)$$

Równanie to sprowadzimy do postaci zawierającej jedynie zmienne p, v . W tym celu do kalorycznego równania stanu gazu doskonałego (i półdoskonałego)

$$du = c_v dT$$

wstawiamy różniczkę zupełną dT obliczoną z równania Clapeyrona

$$dT = \frac{1}{R} (p dv + v dp)$$

i wynik podstawiamy do równania (6.38)

$$\frac{c_v}{R} (p dv + v dp) + p dv = 0.$$

Po prostych przekształceniach

$$c_v v dp + (c_v + R)p dv = 0.$$

Uwzględniając, że $c_v + R = c_p$ (równ. (4.94)) oraz wprowadzając wykładnik adiabaty

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (6.39)$$

otrzymujemy po rozdzieleniu zmiennych

$$\frac{dp}{p} + \kappa \frac{dv}{v} = 0. \quad (6.40)$$

Równanie (6.40) jest słuszne nie tylko dla gazu doskonałego, ale również dla gazu półdoskonałego. W tym drugim przypadku jednak wykładnik adiabaty κ zależy poprzez c_p i c_v od temperatury. Całkowanie równania (6.40) jest proste dla gazu doskonałego, dla którego $\kappa = \text{idem}$. Po scałkowaniu

$$pv^{\kappa} = \text{idem}. \quad (6.41)$$

Pisząc równanie (6.41) w postaci

$$p \frac{1}{\gamma} v = \text{idem}$$

i kojarząc je (przez obustronne podzielenie) z równaniem stanu

$$\frac{pV}{T} = R = \text{idem}$$

otrzymujemy

$$p \frac{1-\gamma}{\gamma} T = \text{idem.} \quad (6.42)$$

równanie to zapisuje się często w postaci zależności pomiędzy parametrami początkowymi i końcowymi przemiany

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (6.43)$$

dogodniej do praktycznych obliczeń. W podobny sposób wyprowadza się zależność

$$TV^{\gamma-1} = \text{idem,} \quad (6.44)$$

inną postacią której jest równanie

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1} \quad (6.45)$$

Równania (6.41)-(6.45) są spełnione przy wszystkich trzech podanych sposobach realizacji przemiany adiabatycznej (rys. 6.6). Dla przemiany zamkniętej ($m = \text{idem}$, przypadek a) można we wzorach tych objętość właściwą zastąpić przez objętość całkowitą $V = mv$ gazu

$$pV^{\gamma} = \text{idem,} \quad (6.41a)$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{idem,} \quad (6.44a)$$

dla maszyny przepływowej ($\dot{m} = \text{idem}$) zamiast objętości właściwej można wprowadzić objętościowe natężenie przepływu $\dot{V} = \dot{m}v$

$$p\dot{V}^{\gamma} = \text{idem,} \quad (6.41b)$$

$$T\dot{V}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \text{idem.} \quad (6.44b)$$

Równania (6.33) i (6.34) na pracę przemiany adiabatycznej można rozwinąć wyliczając spadek energii wewnętrznej i entalpii z kalorycznych równań stanu gazu doskonałego

$$L_{1-2} = m c_v (T_1 - T_2) \quad (6.46)$$

$$N_1 = \dot{L}_{t1-2} = \dot{m} c_p (T_1 - T_2). \quad (6.47)$$

Wstawiając do tych równań zależności (4.97) i (4.98) oraz korzystając ze związku (6.43) i z równania stanu, otrzymujemy

$$L_{1-2} = m \frac{1}{\gamma-1} RT_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right),$$

$$L_{1-2} = \frac{1}{\gamma-1} p_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \quad (6.48)$$

i podobnie

$$N_1 = \dot{L}_{t1-2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 \dot{V}_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \quad (6.49)$$

Równania (6.48) i (6.49) można również uzyskać z podstawowych równań na pracę (4.17) i (4.29) przy wykorzystaniu równań przemiany (6.41a) i (6.41b).

6.5. Politropa

Politropę definiujemy jako zamkniętą przemianę przebiegającą zgodnie z równaniem

$$pV^\gamma = \text{idem}, \quad (6.50)$$

w którym stała γ nosi nazwę wykładnika politropy.

W dalszych rozważaniach będziemy się zajmowali politropą odwracalną lub pseudoodwracalną (beztarciową) gazu doskonałego. Kojarząc równanie (6.50) z równaniem stanu, podobnie jak równanie adiabaty, otrzymujemy dalsze związki pomiędzy parametrami termicznymi gazu

$$TV^{\gamma-1} = \text{idem}, \quad (6.51)$$

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{idem}, \quad (6.52)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (6.53)$$

Ilość ciepła dostarczonego do gazu podczas przemiany politropowej wyznaczmy z równania bilansu (4.59), przy uwzględnieniu, że $dQ_f = 0$

$$dQ = dU + p dV. \quad (a)$$

Różniczkę energii wewnętrznej gazu doskonałego wyraża równanie

$$dU = m c_V dT, \quad (b)$$

a różniczkę $p dV$ wyrazimy poprzez różniczkę dT korzystając z różniczkowej postaci równania stanu

$$p dV + V dp = m R dT \quad (c)$$

i różniczkowej postaci równania przemiany uzyskanej przez kolejne zlogarytmowanie i zróźniczkowanie równania (6.50)

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0. \quad (d)$$

Równanie (d) przekształcamy do postaci

$$V dp + \gamma p dV = 0 \quad (e)$$

i odejmujemy od równania (c), uzyskując związek słuszny dla $\gamma \neq 1$

$$p dV = -\frac{1}{\gamma-1} m R dT. \quad (f)$$

Wstawiając równania (b) i (f) do równania (a) otrzymujemy po uporządkowaniu

$$dQ = m c_V \frac{\gamma-2}{\gamma-1} dT. \quad (6.54)$$

Porównując równanie (6.54) z klasycznym równaniem na ciepło doprowadzone

$$dQ = m c dT$$

stwierdzamy, że politropa jest przemianą, której ciepło właściwe

$$c = c_V \frac{\gamma-2}{\gamma-1} \quad (6.55)$$

jest stałe w każdym punkcie przemiany. Po scałkowaniu równania (6.54) otrzymujemy

$$Q_{1-2} = m c_V \frac{\gamma-2}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = m c (T_2 - T_1). \quad (6.56)$$

Pracę bezwzględną przemiany politropowej można wyznaczyć z definicji, przy wykorzystaniu równania przemiany, można też obliczyć z bilansu energii (równ. (4.57))

$$L_{1-2} = - (U_2 - U_1) + Q_{1-2} = - m c_v (T_2 - T_1) + m c_v \frac{\gamma - \beta}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = m c_v \frac{\beta - 1}{\gamma - 1} (T_1 - T_2).$$

Po uwzględnieniu równania (4.98) otrzymujemy

$$L_{1-2} = \frac{1}{\gamma - 1} m R (T_1 - T_2), \quad (6.57)$$

a po wykorzystaniu równania stanu i zależności (6.53)

$$L_{1-2} = \frac{1}{\gamma - 1} p_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]. \quad (6.58)$$

Z równania (e) wynika, że

$$- V dp = \gamma p dV,$$

a więc również

$$- \int_{p_1}^{p_2} V dp = \gamma \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

co oznacza, że

$$L_{t1-2} = \gamma L_{1-2}. \quad (6.59)$$

Łatwo wykazać, że uprzednio omówione zamknięte przemiany odwracalne lub pseudoodwracalne gazu doskonałego są szczególnymi przypadkami politropy. I tak dla $\gamma = 0$ otrzymujemy izobarę, dla $\gamma = \infty$ izochorę, dla $\gamma = 1$ izotermę, a dla $\gamma = \beta$ adiabatę. Wyprowadzo-

ne wzory na ciepło dostarczone i pracę wykonaną przy politropie stosują się do wszystkich tych przemian, przy czym dla izoterm należy usunąć z tych równań nieoznaczność.

Politropy o wykładnikach $1 < \gamma < \beta$ mają, jak łatwo się przekonać na podstawie równania (6.55) ujemne ciepło właściwe. Są to przemiany, podczas których mimo dostarczania ciepła temperatura gazu maleje i na odwrót.

Aczkolwiek politropa stanowi szeroką klasę przemian, błędne byłoby sążenie, że uogólnia ona wszystkie możliwe przemiany.

6.6. Dławienie adiabatyczne

Dławieniem nazywamy przemianę, podczas której czynnik rozpręża się nie wykonując pracy. Z przemian w różnym stopniu obciążonych tarcie dławienia jest przemianą, podczas której praca tarcia osiąga maksimum. W układzie zamkniętym

$$dL_f = p dV, \quad (6.60)$$

a w urządzeniu przepływowym

$$d\dot{L}_f = - \dot{V} dp, \quad (6.61)$$

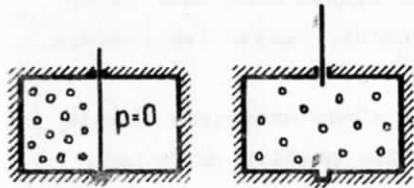
lub dla jednostki masy

$$dl_f = dq_f = - v dp. \quad (6.62)$$

Przykładem dławienia zachodzącego w urządzeniu przepływowym jest przepływ gazu w rurociągu, któremu zawsze towarzyszy spadek ciśnienia, a żadna praca nie jest wykonywana. W ogólnym przypadku gaz płynący rurociągiem może jednocześnie pobierać lub oddawać ciepło przez ściankę rurociągu.

Dławienie przebiegające bez wymiany ciepła jest dławieniem adiabaticznym.

Dławienie izoenergetyczne ma miejsce wówczas, gdy gaz rozpręży się do pustej przestrzeni (rys. 6.10). Z pierwszej zasady termodynamiki wynika, że energia gazu nie ulega zmianie, stąd nazwa. Wzrasta natomiast entropia gazu, bo zjawisko jest wysoce nieodwracalne.



Rys. 6.10. Dławienie izoenergetyczne

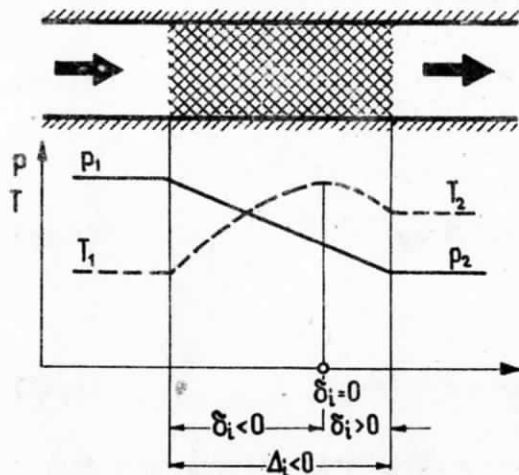
Dławienie izentalpowe zachodzi w zaizolowanym urządzeniu przepływowym (rys. 6.11). Efekt dławienia, wyrażający się spadkiem ciśnienia, jest tym większy, im większy opór napotyka gaz przy przepływie.

Z pierwszej zasady termodynamiki wynika, że przy niewielkich prędkościach przepływu $i_1 = i_2$ dla całego układu dławiącego, a również na każdym odcinku $i = \text{idem}$, stąd nazwa przemiany.

Dla gazu doskonałego i pól doskonałego ze stałości entalpii wynika stałość temperatury $T = \text{idem}$.

Dla wyznaczenia zmiany temperatury dowolnego czynnika rzeczywistego oblicza się tzw. współczynnik efektu Joule'a-Thomsona: różniczkowy

$$\delta_i = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i \quad (6.63)$$



Rys. 6.11. Dławienie izentalpowe

i całkowy

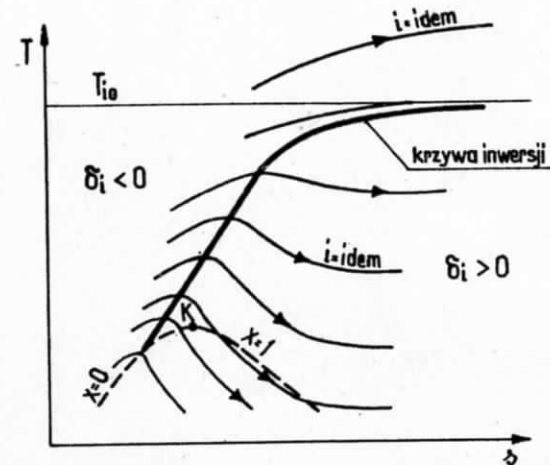
$$\Delta_i = \left(\frac{\Delta T}{\Delta p}\right)_i = \frac{1}{\Delta p} \int_{p_1}^p \delta_i dp. \quad (6.64)$$

Różniczkowy współczynnik efektu Joule'a-Thomsona można obliczyć na podstawie znajomości termicznego równania stanu. W tym celu przekształćmy różniczkę zupełną entalpii (4.74) do postaci

$$dT = \frac{T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v}{c_p} dp + \frac{1}{c_p} di$$

Traktując to jako różniczkę zupełną funkcji $T = T(p, i)$ otrzymujemy przy różniczkce dp pochodną $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i$, czyli

$$\delta_i = \frac{T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v}{c_p p}. \quad (6.65)$$



Rys. 6.12. Krzywa inwersji

Ponieważ ciśnienie przy dławieniu zawsze spada ($dp < 0$) więc współczynnik efektu Joule'a-Thomsona jest dodatni, gdy temperatura przy dławieniu maleje i na odwrót. Takie stany gazu rzeczywistego, przy

których lokalnie współczynnik różniczkowy jest równy zero nazywamy punktami inwersji, a zbiór tych punktów inwersji - krzywą inwersji. Na rys. 6.12 pokazano przebieg krzywej inwersji na wykresie T-s.

Spadek temperatury przy dławieniu gazu występujący dla stanów znajdujących się poniżej krzywej inwersji, jest wykorzystywany do uzyskiwania niskich temperatur i skraplania gazów.

R o z d z i a ł 7

MIESZANINY GAZÓW

Pojęcie mieszaniny jest pojęciem szerokim. Mieści ono w sobie substancje wieloskładnikowe o różnym stopniu rozdrobnienia i wymieszania poszczególnych składników, nawet takie, dla których cząstki poszczególnych składników są widoczne gołym okiem. Najlepszym wymieszanym i co za tym idzie, największą jednorodnością składu, charakteryzują się roztwory.

W roztworach wzajemna rozpuszczalność składników może być ograniczona lub też składniki roztworu mogą się roztwarzać w dowolnych proporcjach.

Mieszaniny gazów są zawsze roztworami o nieograniczonej rozpuszczalności, a zatem nie ma żadnych ograniczeń co do proporcji poszczególnych składników.

7.1. Skład mieszaniny gazów

Skład mieszaniny określamy za pomocą udziałów, będących stosunkami ilości składników do ilości mieszaniny. W zależności od miary ilości składnika i mieszaniny otrzymujemy różne udziały.

Udział gramowy (masowy, wagowy) składnika i jest stosunkiem masy składnika m_i do masy mieszaniny

$$g_i = \frac{m_i}{m}. \quad (7.1)$$

Z faktu, że

$$\sum_i m_i = m \quad (7.2)$$

otrzymujemy po obustronnym podzieleniu przez m , oczywisty związek

$$\sum \xi_i = 1. \quad (7.3)$$

Udział molarowy składnika jest stosunkiem ilości kilomoli składnika n_i do ilości kilomoli mieszaniny

$$z_i = \frac{n_i}{n}, \quad (7.4)$$

przy czym ilość kilomoli mieszaniny definiujemy jako sumę ilości kilomoli składników

$$n = \sum_i n_i. \quad (7.5)$$

Otrzymany w ten sposób kilomol mieszaniny nie posiada już sensu chemicznego (jaki posiada kilomol składnika, będącego pierwiastkiem lub związkiem chemicznym) i ma jedynie sens obliczeniowy. Podobnie iloraz masy mieszaniny i ilości kilomoli nie ma znaczenia masy cząsteczkowej w sensie chemicznym i jest jedynie zastępczą masą cząsteczkową o charakterze obliczeniowym

$$M = \frac{m}{n}. \quad (7.6)$$

Stosując w (7.6) równanie (7.2) i uwzględniając, że dla każdego składnika $m_i = M_i n_i$, otrzymujemy związek

$$M = \sum_i \frac{n_i}{n} M_i = \sum_i z_i M_i \quad (7.7)$$

pozwalający na obliczanie zastępczej masy cząsteczkowej mieszaniny.

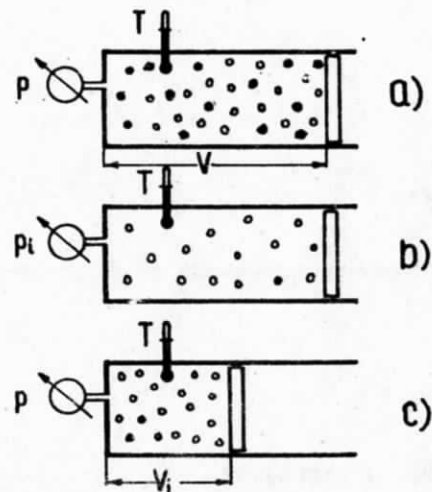
Udział objętościowy składnika mieszaniny jest stosunkiem objętości składnika do objętości mieszaniny, przy

czym obie te objętości są wyznaczone w tych samych warunkach termicznych

$$r_i = \left(\frac{V_i}{V}\right)_{T,p}. \quad (7.8)$$

Gdybyśmy, w celu wyznaczenia udziału objętościowego, odseparowali od mieszaniny pozostałe jej składniki (rys. 7.1), to w tej samej temperaturze pozostały składnik będzie posiadał ciśnienie mniejsze niż miała mieszanina (rys. 7.1). W celu wyznaczenia objętości V_i należy poddać składnik przemianę izotermiczną, w wyniku której osiągnie on ciśnienie mieszaniny.

Podane wyżej określenia i związku dotyczą dowolnych gazów. W dalszych rozważaniach ograniczymy się wyłącznie do mieszanin gazów doskonałych lub półdoskonałych.



Rys. 7.1. Do definicji udziału objętościowego i ciśnienia cząstkowego

7.2. Prawo Daltona

Ciśnienie mieszaniny gazów doskonałych lub półdoskonałych jest sumą ciśnień cząstkowych składników

$$p = \sum_i p_i. \quad (7.9)$$

Ciśnieniem cząstkowym (składnikowym) nazywamy ciśnienie, jakie wywierałby składnik mieszaniny, gdyby w tej samej temperaturze co mieszanina zajmował całą jej objętość. Stan pokazany na rysunku 7.1b jest stanem odpowiadającym przytoczonej wyżej definicji ciśnienia cząstkowego. Przemiana zachodząca pomiędzy stanami b i c

na tymże rysunku jest przemianą izotermiczną, co w przypadku gazu doskonałego lub półdoskonałego upoważnia do napisania równania

$$p_i V = p V_i,$$

z którego wynika

$$p_i = \frac{V_i}{V} p,$$

a stąd na mocy (7.8)

$$p_i = r_i p. \quad (7.10)$$

Po wykonaniu na równaniu (7.10) obustronnego sumowania rozciągniętego na wszystkie składniki

$$\sum_i p_i = \sum_i r_i p$$

i po uwzględnieniu prawa Daltona (7.9), otrzymujemy

$$\sum_i r_i = 1. \quad (7.11)$$

Związek ten, tak jak wszystkie przytoczone w niniejszym podrozdziale, obowiązuje wyłącznie dla gazów doskonałych i półdoskonałych.

7.3. Termiczne równanie stanu mieszaniny gazów doskonałych lub półdoskonałych

Dla pojedynczego składnika obowiązuje równanie Clapeyrona

$$p_i V = n_i (MR)T.$$

Wykonując sumowanie rozciągnięte na wszystkie składniki

$$\left(\sum_i p_i\right)V = \left(\sum_i n_i\right)(MR)T$$

(wielkości stałe wyciągnięto poza znak sumy) i korzystając z równań (7.5) oraz (7.9) otrzymujemy

$$pV = n(MR)T, \quad (7.12)$$

a więc równanie takie, jak dla gazu jednorodnego.

Podobnie można napisać dla składnika

$$p_i V = m_i R_i T.$$

Wykonując sumowanie rozciągnięte na wszystkie składniki

$$\sum_i p_i V = \sum_i m_i R_i T$$

oraz wyciągając poza znak sumy po lewej stronie V , po prawej iloczyn mT , gdzie $m = \sum m_i$, otrzymujemy

$$\left(\sum_i p_i\right)V = m \left(\sum_i \frac{m_i}{m} R_i\right) T.$$

Uwzględniając prawo Daltona (7.9), otrzymujemy

$$pV = m R T, \quad (7.13)$$

gdzie

$$R = \sum_i \xi_i R_i \quad (7.14)$$

jest zastępczą stałą gazową mieszaniny gazów. Stałą tą można również wyliczyć ze związku

$$R = \frac{(MR)}{M}. \quad (7.15)$$

Wzór (7.15) jest dogodniejszy do użycia wtedy, gdy dane są udziały molowe mieszaniny, pozwalające na obliczenie zastępczej masy cząstkowej (równ. (7.7)).

Na podstawie termicznego równania stanu możliwe jest uzyskanie związków pomiędzy różnymi rodzajami udziałów, umożliwiającą wzajemne ich przeliczanie. Pisząc równanie stanu dla składnika i dla mieszaniny

$$p_i V = n_i (MR)T$$

$$p V = n (MR) T$$

i dzieląc te równania stronami, otrzymujemy

$$\frac{p_i}{p} = \frac{n_i}{n}.$$

Uwzględniając równania (7.10) i (7.4), otrzymujemy

$$r_i = z_i. \quad (7.16)$$

Powyższa równość sprawia, że bardzo często udziałów molowych i objętościowych mieszaniny gazów doskonałych lub półdoskonałych nie odróżnia się, oznaczając zarówno jedne, jak i drugie przez r_i .

Podobnie uzyskuje się związek pomiędzy udziałami gramowymi i objętościowymi (molowymi). Dzieląc stronami równania stanu

$$p_i V = m_i R_i T$$

$$p V = m R T$$

otrzymujemy

$$\frac{p_i}{p} = \frac{m_i}{m} \frac{R_i}{R},$$

a po uwzględnieniu równań (7.1) i (7.10)

$$r_i = \xi_i \frac{R_i}{R}. \quad (7.17)$$

Równanie to jest dogodne do przeliczania udziałów gramowych na objętościowe (porównaj wzór (7.14) na R). Jeżeli uwzględnimy, że indywidualna stała gazowa jest odwrotnie proporcjonalna do masy cząstkowej.

$$R_i = \frac{(MR)}{M_i}, \quad R = \frac{(MR)}{M},$$

to otrzymamy równanie

$$\xi_i = r_i \frac{M_i}{M} \quad (7.18)$$

dogodne do obliczeń, gdy dane są udziały molowe (objętościowe).

7.4. Kaloryczne równanie stanu mieszaniny gazów doskonałych lub półdoskonałych

Energia wewnętrzna mieszaniny gazów doskonałych jest sumą energii wewnętrznych poszczególnych składników mieszaniny

$$U = \sum_i U_i = \sum m_i u_i. \quad (7.19)$$

Dla energii wewnętrznej właściwej każdego ze składników obowiązuje kaloryczne równanie stanu gazu jednorodnego (równ. (4.87)), po uwzględnieniu którego

$$U = \sum_i m_i c_{vi} T.$$

Wyciągając poza znak sumy iloczyn mT , gdzie $m = \sum_i m_i$, otrzymujemy równanie

$$U = m \left(\sum_i \frac{m_i}{m} c_{vi} \right) T,$$

które upoważnia do obliczania energii wewnętrznej mieszaniny gazów doskonałych jak dla gazu jednorodnego

$$U = m c_v T$$

przy czym zastępcze ciepło właściwe

$$c_v = \sum_1 \xi_i c_{vi}$$

Do podobnego wniosku dochodzimy posługując się energią molową

$$U = \sum_1 U_1 = \sum_1 n_1 (Mc_v)_1 T = n \left(\sum_1 \frac{n_1}{n} (Mc_v)_1 \right) T = n (Mc_v) T,$$

gdzie zastępcze ciepło molowe określa wzór

$$(Mc_v) = \sum_1 z_1 (Mc_v)_1$$

Analogicznie wyprowadza się równania na entalpię. Również dla mieszaniny gazów półdoskonałych tok przekształceń jest taki sam, a jedynie w równaniach pojawia się średnie ciepło właściwe. Reasumując możemy stwierdzić, że mieszaninę gazów doskonałych lub półdoskonałych można traktować pod względem kalorycznym jak gaz jednorodny, operując zastępczym ciepłem właściwym

$$\begin{array}{l} c_v \\ c_p \\ c_v \left| \begin{array}{l} T \\ O \end{array} \right. \\ c_p \left| \begin{array}{l} T \\ O \end{array} \right. \end{array} c = \sum_1 \xi_i c_i \quad (7.20)$$

lub zastępczym ciepłem molowym

$$\begin{array}{l} (Mc_v) \\ (Mc_p) \\ (Mc_v) \left| \begin{array}{l} T \\ O \end{array} \right. \\ (Mc_p) \left| \begin{array}{l} T \\ O \end{array} \right. \end{array} (Mc) = \sum_1 z_1 (Mc)_1$$

Dla zastępczych ciepł obowiązuja oczywiście związki (4.94) i (4.95).

R o z d z i a ł 8

PARY I GAZY RZECZYWISTE

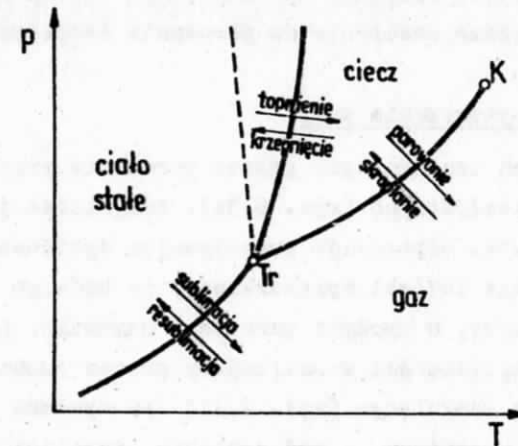
Prawa termodynamiki poznane w poprzednich rozdziałach ilustrowaliśmy przykładami gazów: doskonałych i półdoskonałych. Te, nie istniejące w rzeczywistości, modele gazu w pewnych warunkach aproksymują dość dobrze gazy rzeczywiste. Gaz rzeczywisty jest jednym z trzech stanów skupienia substancji rzeczywistej. Możliwość zmiany stanu skupienia jest jedną z istotnych cech substancji rzeczywistej, której nie posiadał gaz doskonały i gaz półdoskonały.

8.1. Stany skupienia substancji czystej

Stany skupienia: stały, ciekły i gazowy nazywa się krótko fazami^{x)} a zmiany stanu skupienia - przemianami fazowymi. W naszych rozważaniach będziemy się zajmować fazami i przemianami faz substancji czystej będącej jednym pierwiastkiem lub związkem chemicznym. Występowanie substancji pod postacią którejś z trzech faz zależy od jej stanu termicznego, tzn. od ciśnienia i temperatury. Na wykresie p-t (rys. 8.1) każdemu stanowi substancji odpowiada punkt. Zbiór punktów odpowiadających stanom, w którym substancja występuje w fazie gazowej jest obszarem gazu. Linie, wzdłuż których stykają się obszary poszczególnych faz odpowiadają stanom, w których współistnieją w równowadze dwie fazy. Stany te są jednocześnie stanami równowagowego przechodzenia jednej fazy w drugą.

Stan układu jednofazowego (np. gazu można zmieniać obierając dowolnie dwa parametry termiczne np. p i T spośród stanów leżą-

^{x)} Pojęcie fazy jest nieco węższe od stanu skupienia, gdyż w ramach stanu skupienia stałego może występować więcej niż 1 faza, jeżeli dana substancja posiada różne odmiany alotropowe. Dla fazy gazowej pojęcia te pokrywają się.



Rys. 8.1. Wykres p-t dla substancji rzeczywistej

cych w obszarze danej fazy. Mówimy, że układ taki posiada dwa termodynamiczne stopnie swobody. Jeżeli układ jest dwufazowy, to mamy tylko jeden stopień swobody - pomiędzy ciśnieniem i temperaturą układu istnieje jednoznaczny związek, którego graficzną interpretacją jest krzywa równowagi faz. Równoczesne występowanie wszystkich trzech faz może zachodzić tylko w jednym stanie (zero stopni swobody) zwanym punktem potrójnym (na rysunku 8.1 oznaczony symbolem T_r).

Wszystkie możliwe stany czynnika w przestrzeni T-p-v leżą na powierzchni stanów (rys. 2.5). Wykres przedstawiony na rys. 8.1 jest rzutem tej powierzchni na płaszczyznę p-T. Na wykresie tym pokazano dwie wersje krzywej topnienia: linia ciągła oddaje charakter tej krzywej dla większości substancji (kurczących się przy krzepnięciu), linia przerywana oddaje charakter tej krzywej dla H_2O (rozszerzającej się przy krzepnięciu).

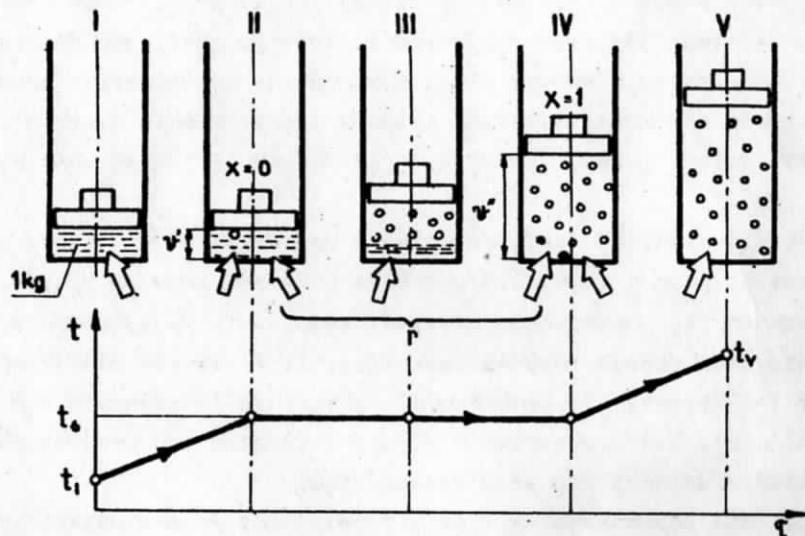
Wszystkie zaznaczone na rys. 8.1 przemiany fazowe przebiegają jakościowo podobnie. Dlatego też ograniczymy się do opisu jednej z tych przemian, najczęściej pojawiającej się w zagadnieniach techniki cieplnej - przemiany parowania. Nie będziemy również

opisywać przemiany skraplania, będącej dokładnym odwróceniem przemiany parowania.

Z różnych możliwych sposobów realizacji przemiany parowania praktycznie największe znaczenie ma parowanie izobaryczne.

8.2. Izobaryczne wytwarzanie pary

W zastosowaniach technicznych proces parowania przebiega zwykle w urządzeniach przepływowych (rys. 6.3b). Przykładem jest kocioł parowy, w którym woda odparowuje przepływając systemem rur, lub też tzw. zamrażalnik lodówki sprężarkowej, do którego dopływa ciekły czynnik chłodniczy, a wypływa para tego czynnika. Dla uzyskania jednak większej pogłębłości zrealizujemy proces izobarycznego parowania w układzie zamkniętym (rys. 6.3a). Na rysunku 8.2 pokazano kolejne etapy tej przemiany, a pod rysunkiem przebieg temperatury czynnika podczas przemiany. Opisywana przemiana izobarycznego wytwarzania pary jest również przedstawiona we współrzędnych $p-t$ i $p-v$ na rys. 8.3.

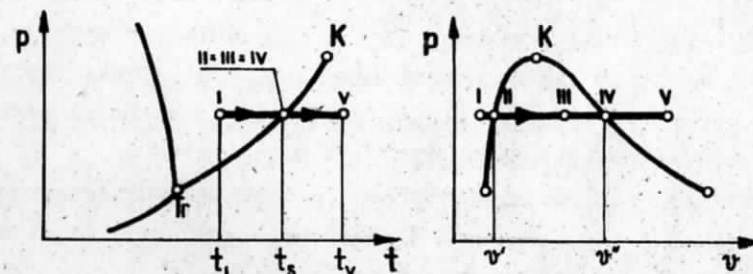


Rys. 8.2. Izobaryczne wytwarzanie pary

Temperatura, przy której pod danym ciśnieniem przebiega parowanie, czyli temperatura parowania, jest jednocześnie temperaturą skraplania przy realizacji zjawiska odwrotnego. Jest to również temperatura równowagi faz ciekłej i gazowej znajdujących się pod danym ciśnieniem p . Dla uniknięcia nieporozumień stosujemy dla tej temperatury neutralną nazwę - **temperatura nasycenia**. Jej zależność od ciśnienia ilustruje na wykresie $p-t$ krzywa zawarta pomiędzy punktem potrójnym T_r i punktem krytycznym K (rys. 8.1 i 8.3). Krzywą tą można aproksymować równaniem empirycznym

$$\lg p = A - \frac{B}{T} - C \lg T, \quad (8.1)$$

w którym stałe A , B i C zależą od rodzaju czynnika.



Rys. 8.3. Przebieg izobarycznego parowania na wykresach $p-T$ i $p-v$

Ciecz, która ma być odparowana może przy rozpoczęciu zjawiska (punkt I) mieć temperaturę mniejszą od temperatury nasycenia, $t_I < t_s$. Należy ją więc najpierw podgrzać do temperatury nasycenia (przemiana I-II). Parowanie rozpoczyna się z chwilą rozpoczęcia podgrzewania cieczy posiadającej już temperaturę nasycenia ($t_{II} = t_s$) i kończy się w momencie, gdy wyparuje ostatnia kropla cieczy. Powstałą w wyniku parowania parę, posiadającą również temperaturę nasycenia ($t_{IV} = t_s$) nazywamy **parą nasyconą suchą**. W pośrednim stadium parowania (punkt III) układ jest mieszaniną

cieczy o temperaturze nasycenia i pary nasyconej suchej, o wspólnej temperaturze i ciśnieniu. Mieszaninę taką nazywamy parą nasyconą mokrą lub krótko parą mokrą. Dalsze podgrzewanie pary nasyconej suchej powoduje wzrost temperatury. Parę o temperaturze wyższej od temperatury nasycenia odpowiadającej jej ciśnieniu ($t_V > t_g$) nazywamy w technice parą przegrzaną. Fizycy stosują dla niej często nazwę par nienasycona.

Zmieniając ciśnienie parowania, zmieniamy także temperaturę parowania. Zmieniają się również objętości właściwe cieczy oraz pary nasyconej suchej, a także ilość ciepła dostarczanego w procesie parowania. Przy wzroście ciśnienia (i temperatury) parowania ciecz wrząca jest bardziej rozrzedzona (większa objętość właściwa) natomiast para nasycona sucha bardziej zgęszczona, odparowanie wymaga dostarczenia mniejszej ilości ciepła. W punkcie krytycznym K określonym temperaturą krytyczną T_k i ciśnieniem krytycznym p_k znika różnica między cieczą i parą nasyconą suchą. Punkt krytyczny jest więc górnym kresem parametrów, przy których zachodzi parowanie (dolnym jest punkt potrójny).

Ilość ciepła jaką musimy dostarczyć w celu izobarycznego odparowania jednostki masy cieczy o temperaturze nasycenia (tzn. w celu zamienienia jej w parę nasyconą suchą) nazywamy utajonym ciepłem parowania i oznaczamy symbolem r . Utajone ciepło parowania, jak każde ciepło przemiany izobarycznej, jest równe przyrostowi entalpii właściwej

$$r = i_{IV} - i_{II} \quad (8.2)$$

Utajone ciepło parowania zależy od ciśnienia (lub temperatury) nasycenia. Największą wartość osiąga ono w punkcie potrójnym $r_{max} = r_{Tr}$, najmniejszą w punkcie krytycznym ($r_k = 0$). Dla H_2O $r_{Tr} = 2501$ kJ/kg.

8.3. Para mokra

Jak już wyżej wspomniano, parą mokrą nazywamy mieszaninę cieczy o temperaturze nasycenia i pary nasyconej suchej, będących ze sobą w równowadze (tzn. mających wspólne ciśnienie i temperaturę).

Parę mokrą można uzyskać np. w wyniku opisanego uprzednio procesu izobarycznego parowania (podgrzewania cieczy o temperaturze nasycenia) lub w wyniku izobarycznego odbierania ciepła od pary nasyconej suchej, albo też - jak to dzieje się w turbinach parowych - wyniku rozprężenia adiabatycznego pary przegrzanej lub nasyconej suchej. W tych dwu ostatnich przypadkach przy niewielkich ilościach cieczy zawartej w parze mokrej - ciecz ta jest unoszona przez parę nasyconą suchą w postaci drobnych kropelek. Całkowite odseparowanie cieczy i pary nasyconej suchej, jakie występuje przy dużych ilościach cieczy, sprzyja naruszeniu równowagi obu tych składników (zróźnicowaniu temperatur), a wtedy taka mieszanina nie jest już parą mokrą. Wszystkie parametry dotyczące ciekłego składnika pary mokrej (tzn. cieczy o temperaturze nasycenia) będziemy oznaczali górnym indeksem ()', natomiast parametry dotyczące pary nasyconej suchej indeksem ()''. Parametry te, tzn. v' , v'' , i' , i'' , u' , u'' , s' , s'' są funkcjami temperatury (lub ciśnienia) nasycenia. W tabelicy 5 podano wartości tych funkcji dotyczące wody, dla wygody uszeregowane raz podług ciśnień, drugi raz podług temperatur.

Jako poziom odniesienia przyjęto dla wody stan cieczy w punkcie potrójnym, określonym parametrami $t_{Tr} = 0,01^\circ C$, $p_{Tr} = 0,006108$ bar. Wartości odniesienia energii wewnętrznej i entropii są zerowe

$$u'_{Tr} = 0, \quad s'_{Tr} = 0.$$

Dla innych czynników termodynamicznych przyjmuje się różne poziomy odniesienia: stan cieczy w temperaturze $0^\circ C$ (jeżeli temperatura ta leży pomiędzy punktem potrójnym i krytycznym) lub też stan czynnika w punkcie krytycznym. Wartości odniesienia przyjmuje się dla en-

talpii i entropii i nie zawsze są one zerowe, np. dla czynników ziębnicznych przyjmuje się w punkcie krytycznym $i_k = 1000 \text{ kJ/kg}$, $s_k = 1 \text{ kJ/(kg deg)}$.

Skład pary mokrej określamy za pomocą stopnia suchości będącego udziałem masowym pary suchej w parze mokrej:

$$x = \frac{m''}{m' + m''} \quad (8.3)$$

Oczywiste jest, że dla skrajnych stanów pary mokrej $x = 0$ (ciecz o temperaturze nasycenia) i $x = 1$ (para nasycona sucha).

Dla wyznaczenia objętości właściwej pary mokrej o danym stopniu suchości weźmy pod rozwagę 1 kg pary mokrej. Zawiera on x kg pary suchej zajmującej objętość xv'' oraz $(1-x)$ kg cieczy zajmującej objętość $(1-x)v'$. Suma tych objętości jest objętością 1 kg pary mokrej, a więc jej objętością właściwą

$$v = xv'' + (1-x)v'.$$

Po uporządkowaniu

$$v = v' + x(v'' - v'). \quad (8.4)$$

Podobnie wyprowadzamy wzór na entalpię właściwą pary mokrej

$$i = i' + x(i'' - i'), \quad (8.5)$$

przy czym różnica entalpii $i'' - i'$ jest identyczna z różnicą entalpii w równaniu (8.2), a więc

$$r = i'' - i'. \quad (8.6)$$

Również i entropia właściwa pary mokrej może być obliczona z analogicznego równania

$$s = s' + x(s'' - s'). \quad (8.7)$$

Ponieważ parowanie izobaryczne jest jednocześnie izotermiczne, więc na mocy równania (6.24) możemy napisać

$$r = T(s'' - s'). \quad (8.8)$$

Tablice pary wodnej (jak również tablice par innych czynników) na ogół nie zawierają energii wewnętrznej u' i u'' , gdyż bardzo rzadkie są przypadki, w których zachodzi potrzeba użycia tej wielkości. W razie potrzeby energię wewnętrzną pary mokrej można obliczyć z funkcji Gibbsa

$$u = i - pv,$$

po uprzednim obliczeniu entalpii właściwej i (równ. (8.5)) oraz objętości właściwej v (równ. (8.4)). Można też posłużyć się równaniem

$$u = u' + x(u'' - u'), \quad (8.9)$$

przy czym

$$u' = i' - pv'$$

$$u'' = i'' - pv''$$

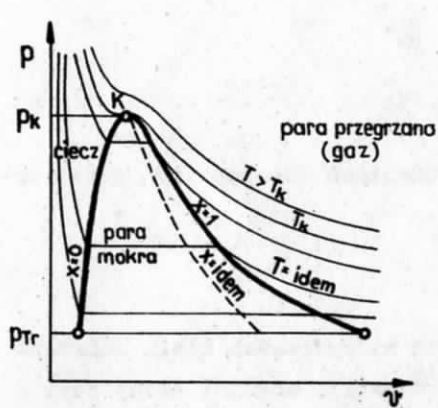
Dla cieczy przy niezbyt wysokich ciśnieniach iloczyn pv' jest bardzo mały i można przyjmować $u' \approx i'$.

8.4. Wykresy stanu

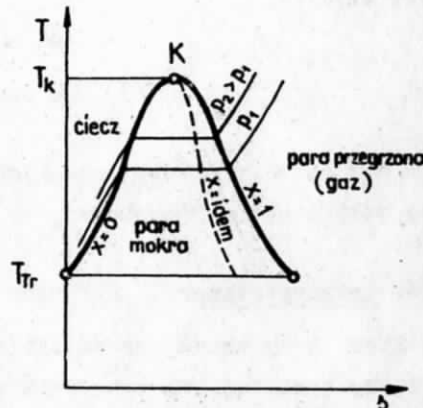
Stan pary mokrej można zilustrować na wykresach stanu substancji rzeczywistej. Na wykresach tych wszystkie możliwe stany pary mokrej zajmują obszar ograniczony liniami odpowiadającymi stanom cieczy wrzącej (linia stopnia suchości $x = 0$) i stanom pary nasyconej suchej (linia stopnia suchości $x = 1$). Linia zamykająca ten obszar jest odcinek izobaro-izotermy punktu potrójnego.

Jedynie na wykresie p-T obszar pary mokrej degeneruje się do linii i tylko na tym wykresie punkt potrójny jest punktem. Wynika to stąd, że w punkcie tym jedynie ciśnienie i temperatura mają ustaloną wartość, natomiast pozostałe parametry: objętość właściwa, entalpia, entropia - są zależne od składu (udziałów poszczególnych faz). Linie stopnia suchości $x=0$, $x=1$, z uwagi na swoją rolę granic obszaru pary mokrej, noszą nazwę linii granicznych. Oprócz tych linii na wykresach stanu nanosi się linie pośrednich stopni suchości, a także linie stałych wartości wszystkich parametrów termicznych i kalorycznych (z wyjątkiem energii wewnętrznej właściwej). Dzięki temu każdy z tych wykresów może zastąpić tablice oraz termiczne i kaloryczne równania stanu.

Używane są następujące wykresy: p-v, T-s, i-s, p-i, przy czym pierwsze dwa służą do celów ilustracyjnych (można z nich przedstawić ciepło dostarczone i pracę wykonaną podczas przemiany w postaci odpowiednich pól), pozostałe dwa wykresy służą do wykonywania obliczeń. Wykres p-i jest często wykonywany w układzie półlogarytmicznym log p-i i jest stosowany przede wszystkim w ziębnictwie.

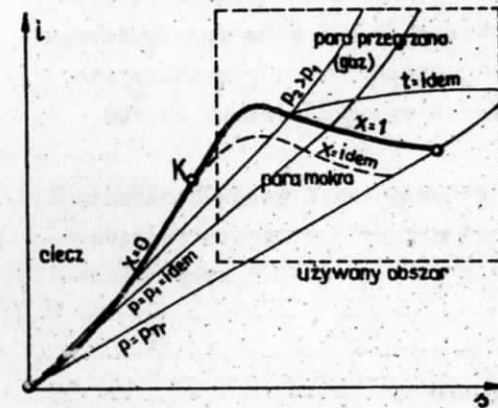


Rys. 8.4. Wykres p-v dla pary

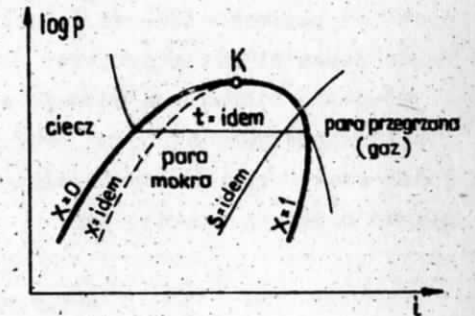


Rys. 8.5. Wykres T-s dla pary wodnej

Na wykresach stanu przedstawia się oprócz pary mokrej stany pary przegrzanej i cieczy. Obszary tych stanów przylegają odpowiednio do linii granicznej $x = 1$, $x = 0$. Dzięki temu rozszerza się zakres stosowania tych wykresów.



Rys. 8.6. Wykres i-s dla pary wodnej



Rys. 8.7. Wykres log p-i dla pary

Na rysunkach (8.4)-(8.7) przedstawiono szkice wykresów p-v, T-s, i-s, log p-i, przy czym wykresy T-s oraz i-s są wykreślane przy przyjęciu poziomu odniesienia $u'_{Tr} = 0$, $s'_{Tr} = 0$ (jak dla H_2O). W praktyce operuje się określonymi wycinkami wykresów i-s i log p-i. Na rys. 8.6 pokazano używany obszar wykresu i-s dla pary wodnej. We wkładce skryptu znajduje się wykres i-s dla H_2O oraz wykres log p-i dla dwufluorodwuchlorometanu (freonu 12).

8.5. Para przegrzana - gaz rzeczywisty

Gazem rzeczywistym nazywamy fazę gazową (gazowy stan skupienia) substancji rzeczywistej. Jeżeli temperatura gazu rzeczywistego niewiele przekracza temperaturę nasycenia odpowiadającą ciśnieniu jakie ma gaz, to wówczas nazywa się go parą przegrzaną. Umowną granicą jest temperatura krytyczna, ale umowa ta nie zawsze jest przestrzegana - np. terminu przegrzana para wodna używa się dla temperatur znacznie przekraczających temperaturę krytyczną.

8.5.1. Termiczne równanie stanu gazu rzeczywistego

Jak już wspomniano w rozdz. 2 gaz rzeczywisty dostatecznie rozrzedzony, tzn. pod niskim ciśnieniem i dostatecznie wysoką temperaturą, może być traktowany jak doskonały lub półdoskonały, dla których to gazów termicznym równaniem stanu jest równanie Clapeyrona. W miarę jednak zwiększającej się gęstości gazu rzeczywistego zwiększają się odstępstwa od równania Clapeyrona i w niekorzystnych przypadkach równanie to może dawać wynik obarczony błędem rzędu nawet kilkuset procent.

Równanie Clapeyrona stosuje się do wszystkich gazów doskonałych i półdoskonałych, a rodzaj gazu uwzględniony jest w nim poprzez jedną stałą, zwaną indywidualną stałą gazową R i z wszystkich równań o jednej stałej, tzn.

$$F(T, p, v, R) = 0$$

równanie Clapeyrona jest równaniem najdokładniejszym. Równanie stanu gazu rzeczywistego powinno mieć taką budowę, by dla małych ciśnień ($p \rightarrow 0$) jego postacią asymptotyczną było równanie Clapeyrona. Musi ono przy tym zawierać dodatkowe stałe indywidualne zależne od rodzaju gazu. Im większa jest żądana dokładność równania, tym więcej stałych musi ono zawierać.

Najbardziej rozpowszechnione są równania o dwóch dodatkowych stałych indywidualnych, przy czym stałymi tymi mogą być parametry punktu krytycznego T_k i p_k .

$$F(T, p, v, R, T_k, p_k) = 0. \tag{8.10}$$

Parametry punktu krytycznego zaliczają się do podstawowych danych o czynniku termodynamicznym, co ułatwia stosowanie równań typu (8.10). Parametry krytyczne dla ważniejszych gazów podano w tabelicy 1.

Najdokładniejszym równaniem z tej grupy równań jest zmodyfikowane równanie Clapeyrona

$$pv = Z RT, \tag{8.11}$$

gdzie Z jest stosunkiem objętości właściwej gazu rzeczywistego v do objętości właściwej tego gazu traktowanego jako półdoskonały lub doskonały v^*

$$Z = \frac{v}{v^*} \tag{8.12}$$

i nosi nazwę l i c z b y ś c i ś l i w o ś c i. Liczba ściślności zależy od stanu termicznego czynnika, tzn. od temperatury i ciśnienia, a także od rodzaju gazu, poprzez parametry punktu krytycznego

$$Z = Z(T, p, T_k, p_k),$$

przy czym funkcja ta może być przedstawiona w postaci bezwymiarowej

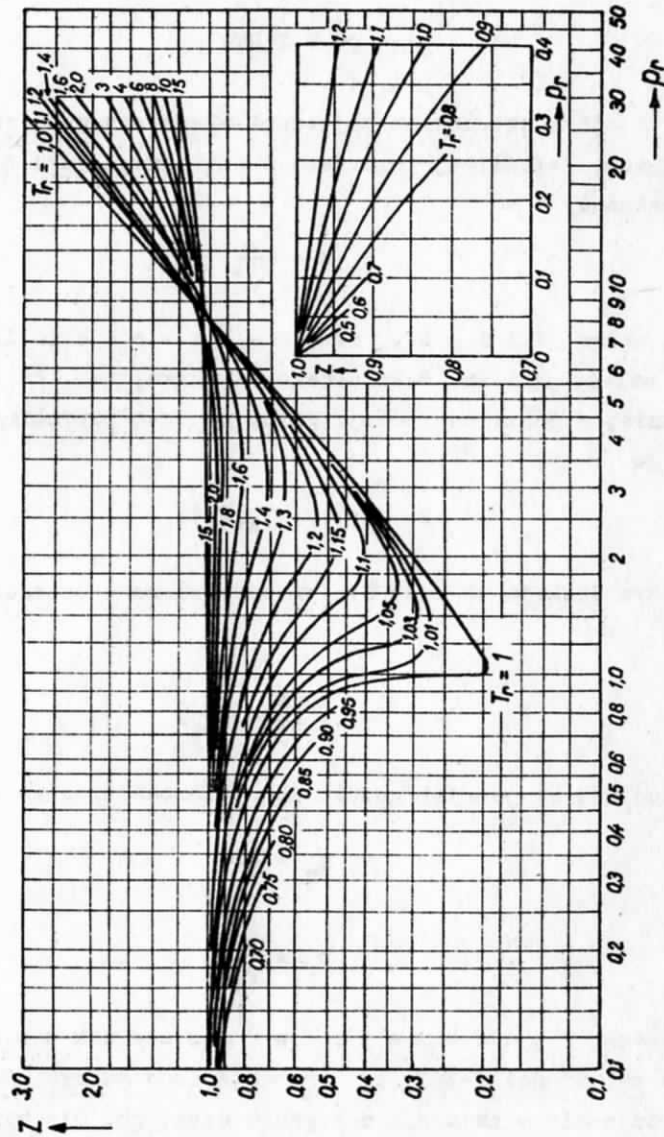
$$Z = Z\left(\frac{T}{T_k}, \frac{p}{p_k}\right) \tag{8.13}$$

słusznej dla wszystkich gazów. Bezwymiarowe zmienne

$$T_r = \frac{T}{T_k} \tag{8.14}$$

$$p_r = \frac{p}{p_k} \tag{8.15}$$

noszą nazwę p a r a m e t r ó w z r e d u k o w a n y c h. Wykres zależności $Z=Z(T_r, p_r)$ przedstawiono na rys. 8.8. Zależność ta stosuje się w zasadzie dla gazów czystych. Dla mieszanin gazów



Rys. 8.8. Liczba ściśliwości jako funkcja parametrów zredukowanych

rzeczywistych można ją również stosować z nieco gorszym przybliżeniem, po wprowadzeniu tzw. parametrów pseudokrytycznych mieszaniny

$$T_k = \sum_i r_i T_{ki} \quad (8.16)$$

$$p_k = \sum_i r_i p_{ki} \quad (8.17)$$

Spotykane są również w literaturze indywidualne wykresy liczby ściśliwości dla konkretnych gazów, przy czym zmiennymi niezależnymi są wtedy nie parametry zredukowane, lecz wprost temperatura T i ciśnienie p .

Do grupy równań zawierających trzy stałe indywidualne zaliczane jest m.in. bardzo popularne równanie Van der Waalsa

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT, \quad (8.18)$$

przy czym dodatkowe stałe a i b mogą być wyrażone przez parametry punktu krytycznego. Równanie to nie zapewnia jednak dokładności dostatecznej dla potrzeb technicznych i nie zaleca się stosować je.

Równania stanu zawierające więcej niż trzy stałe indywidualne zapewniają większą dokładność obliczeń. Istnieje duża różnorodność tych równań opracowywanych zwykle dla pewnej grupy czynników lub nawet indywidualnie dla poszczególnych gazów. Równania te można znaleźć w bardziej szczegółowych podręcznikach termodynamiki lub literaturze specjalistycznej dotyczącej właściwości czynników termodynamicznych.

Większość równań stanu gazów rzeczywistych daje się rozwikłać jedynie względem ciśnienia, w praktyce natomiast najczęściej wyznaczamy z równania stanu objętość właściwą dla danej temperatury i ciśnienia. Konieczne jest wówczas rozwiązywanie równania przestępnego, a w najlepszym wypadku szukanie miejsca zerowego wielomianu wysokiego stopnia. Wady tej nie posiada termiczne równanie

stanu opracowane przez Wukałowicza, Zubarewa i Sergiejewej (1967 r.) dla pary wodnej

$$pv = RT (1 + Bp + Cp^2 + Dp^3) \quad (8.19)$$

gdzie:

$$B = 10^{-9} \sum_{n=0}^5 b_n \psi^n$$

$$C = 10^{-16} \sum_{n=0}^8 c_n \psi^n$$

$$D = 10^{-23} \sum_{n=0}^8 d_n \psi^n$$

$$\psi = 1000/T.$$

Stałe b_n , c_n i d_n dostosowane do jednostek układu SI (ciśnienie w N/m^2) podano w zestawieniu 8.1. Równanie (8.19) stosuje się dla temperatur do $700^\circ C$ i ciśnień do 500 bar.

Zestawienie 8.1

Stałe w równaniu stanu pary wodnej (8.19)

n	b_n	c_n	d_n
0	- 5,01140	- 29,133164	- 34,551360
1	+ 19,6657	+ 129,65709	+ 230,69622
2	- 20,9137	- 181,95576	- 657,21885
3	+ 2,32488	+ 0,704026	+1036,1870
4	+ 2,67376	+ 247,96718	- 977,45125
5	- 1,62302	- 264,05235	+ 555,88940
6		+ 117,60724	- 182,09871
7		- 21,276671	+ 30,554171
8		+ 0,5248023	- 1,9917134

8.5.2. Kaloryczne równania stanu gazu rzeczywistego

Entalpię właściwą i entropię właściwą gazu rzeczywistego oblicza się całkując równania (4.74) i (5.8)

$$di = c_p dT + \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp$$

$$ds = \frac{c_p}{T} dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp,$$

przy czym objętość właściwą v i jej pochodną $\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$ wyraża się w funkcji T i p z termicznego równania stanu $v = v(T, p)$. Energię wewnętrzną właściwą oblicza się odejmując od entalpii właściwej iloczyn pv (równ.(4.35)).

Jeżeli jako termicznego równania stanu użyjemy zmodyfikowanego równania Clapeyrona (8.11), to dochodzimy do następujących zależności bezwymiarowych

$$\frac{i-i^*}{RT_k} = \frac{(Mi) - (Mi)^*}{(MR)T_k} = f(T_r, p_r) \quad (8.20)$$

$$\frac{s-s^*}{R} = \frac{(Ms) - (Ms)^*}{(MR)} = \varphi(T_r, p_r), \quad (8.21)$$

gdzie T_k jest temperaturą krytyczną, a T_r i p_r parametrami zredukowanymi (równ. (8.14) i (8.15)). Wielkości i^* i s^* są odpowiednio entalpią i energią wewnętrzną właściwą danego gazu traktowanego jak gaz półdoskonały i wyznaczamy je z równań

$$i^* = \int_0^T c_p^* dT = c_p^* \left| T \right|_0^T \quad (8.22)$$

$$s^* = \int_{T_0}^T \frac{c_p^*}{T} dT - R \ln \frac{p}{p_0}, \quad (8.23)$$

w których c_p^* jest ciepłem właściwym gazu rzeczywistego traktowanego jak półdoskonały (przy $p \rightarrow 0$).

Równania (8.20) i (8.21), wyrażające zależność zredukowanych nadwyżek entalpii i entropii gazu rzeczywistego ponad ich wartości dla gazu półdoskonałego, mają charakter uniwersalny - stosują się do wszystkich gazów. Wykresy tych zależności pokazano na rys.

8.9 i 8.10. W literaturze spotyka się często wykresy zależności

$$\frac{(Mi)_T - (Mi)_k^*}{T_k} = (MR) f(T_r, p_r)$$

$$(Ms) - (Ms)^* = (MR) \varphi(T_r, p_r)$$

mające również znaczenie uniwersalne (gdyż stała gazowa (MR) jest stałą uniwersalną) i posiadających wymiar użytej stałej gazowej. Zależności (8.20) i (8.21) mogą być wprost użyte do wyznaczania przyrostów entropii lub entalpii przy bilansowaniu zjawisk, w których nie występują zmiany stanu skupienia. Chcąc przy ich pomocy wyznaczyć entalpię lub entropię substancji względem poziomu odniesienia uwzględniającego zmiany stanu skupienia, należy wyznaczyć i''_0 lub też s''_0 dla ciśnienia odniesienia, a następnie dodać do tego różnicę $(i - i''_0)$ czy też $(s - s''_0)$ obliczoną za pomocą wspomnianych zależności. Chcąc np. obliczyć entalpię przegrzanej pary wodnej o parametrach T, p obliczymy w pierw entalpię pary nasyconej suchej w punkcie potrójnym T_r

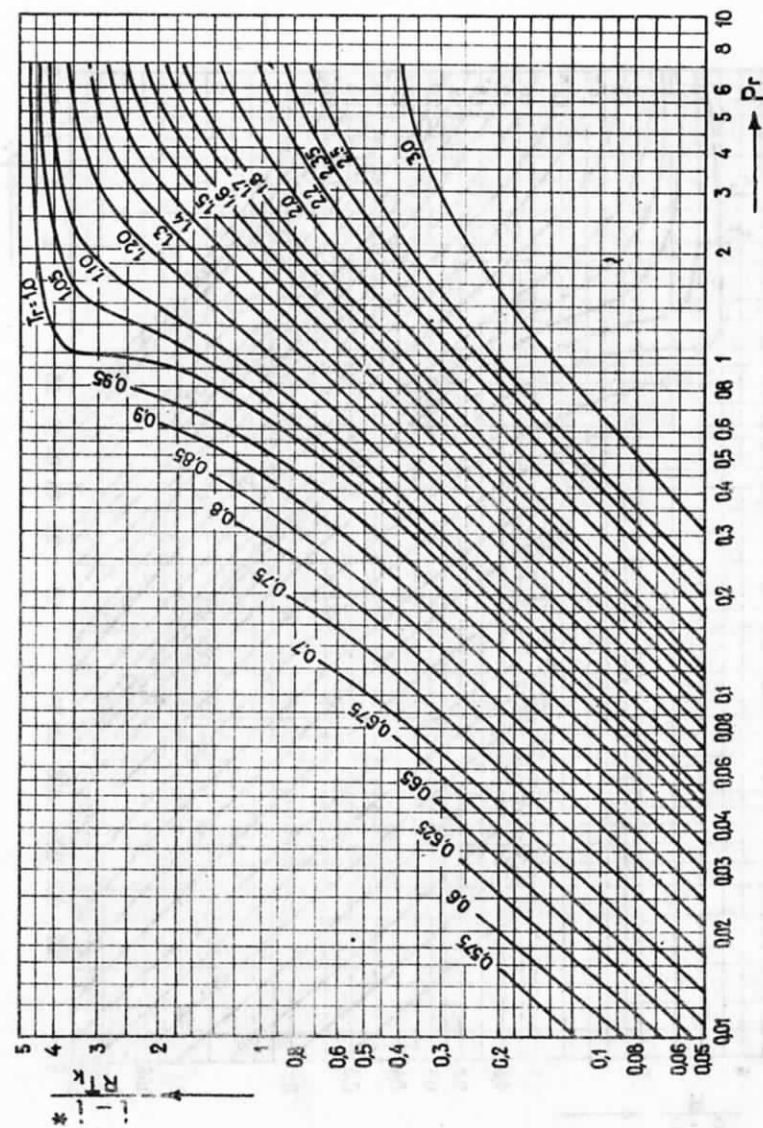
$$i''_{Tr} = i'_{Tr} + r_{Tr}$$

Ponieważ dla pary wodnej przyjęto poziom odniesienia $u'_{Tr} = 0$, więc

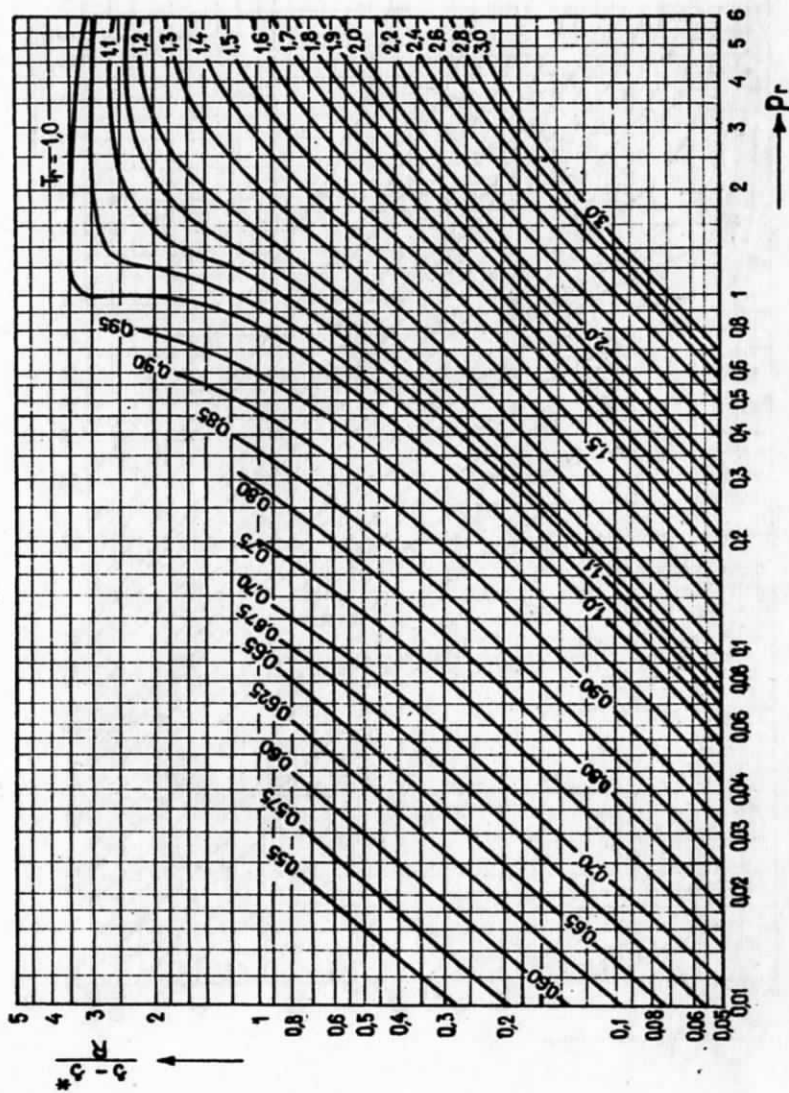
$$i''_{Tr} = p_{Tr} v'_{Tr} + r_{Tr} \quad (8.24)$$

Entalpię i dla parametrów T, p można przedstawić w postaci

$$i(T, p) = i''_{Tr} + (i(T, p) - i''_{Tr}), \quad (8.25)$$



Rys. 8.9. Zredukowana nadwyżka entalpii gazu rzeczywistego ponad entalpię gazu półdoskonałego.



Rys. 8.10. Zredukowana nadwyżka entropii gazu rzeczywistego ponad entropię gazu półdoskonałego

przy czym entalpia pary nasyconej może być wyznaczona jako entalpia gazu rzeczywistego o parametrach nasycenia

$$i''_{Tr} = i(T_{Tr}, p_{Tr}). \quad (8.26)$$

Wstawiając (8.24) i (8.26) do równania (8.25) otrzymujemy

$$i(T, p) = p_{Tr} v'_{Tr} + r_{Tr} + [i(T, p) - i(T_{Tr}, p_{Tr})].$$

Występująca w powyższym równaniu różnica entalpii dwóch punktów leżących w obszarze fazy gazowej, może być wyznaczona przy pomocy zależności (8.20) i wynosi

$$i(T, p) - i(T_{Tr}, p_{Tr}) = c_p^* \int_{T_{Tr}}^T (T - T_{Tr}) + RT_k \left[f\left(\frac{T}{T_k}, \frac{p}{p_k}\right) - f\left(\frac{T_{Tr}}{T_k}, \frac{p_{Tr}}{p_k}\right) \right].$$

Ostatecznie więc

$$i(T, p) = p_{Tr} v'_{Tr} + r_{Tr} + c_p^* \int_{T_{Tr}}^T (T - T_{Tr}) + RT_k \left[f\left(\frac{T}{T_k}, \frac{p}{p_k}\right) - f\left(\frac{T_{Tr}}{T_k}, \frac{p_{Tr}}{p_k}\right) \right]. \quad (8.27)$$

Wykorzystując do obliczenia entalpii i entropii właściwej pary wodnej termiczne równanie stanu (8.19) uzyskujemy następujące równania kaloryczne

$$i = i_0 - RT^2 p (B' + \frac{1}{2} C' p + \frac{1}{3} D' p^2) \quad (8.28)$$

$$i_0 = 1808,92 + 1,48286 T + 3,79025 \cdot 10^{-4} T^2 + 103,3156 \log T$$

$$B' = -10^{-12} \sum_{n=1}^5 a_n p^n$$

$$C' = - 10^{-19} \sum_{n=1}^8 n c_n \delta^{n+1}$$

$$D' = - 10^{-26} \sum_{n=1}^8 n d_n \delta^{n+1}$$

oraz

$$s = s_o - R \ln \frac{p}{p_{Tr}} - R (B + TB') (p - p_{Tr}) - \frac{R}{2} (C + TC') (p^2 - p_{Tr}^2) - \frac{R}{3} (D + TD') (p^3 - p_{Tr}^3) \quad (8.29)$$

$$s_o = 0,799100 + 3,41441 \log T + 7,5805 \cdot 10^{-4} T - 46,174 \frac{1}{T}. \quad (8.30)$$

Jednostką energii w powyższych równaniach jest 1 kJ, pozostałe jednostki i oznaczenia jak w równaniu (8.19).

Dla dokładnych obliczeń parametrów termodynamicznych H_2O można posłużyć się układami równań opracowanymi przez międzynarodowy zespół termodynamicznych (International Formulation Committee).

Są to dwa układy równań:

1. The 1968 IFC Formulation for Scientific and General Use,
2. The 1967 IFC Formulation for Industrial Use.

Pierwszy z nich ma charakter wzorca właściwości termodynamicznych H_2O , drugi jest bardziej uproszczony kosztem nieco mniejszej dokładności. Oba układy równań nadają się wyłącznie do obliczeń komputerowych. Dołączone do niniejszego skryptu tablice 5 i 6 zostały obliczone w oparciu o pierwszy układ równań (tablica 6 jest fotokopią tabulogramu obliczeń).

R o z d z i a ł 9

GAZY WILGOTNE

9.1. Skład gazu wilgotnego

Gazem wilgotnym nazywamy mieszaninę gazów, z których jeden może podlegać procesom zmiany stanu skupienia w danym przedziale zmian temperatury i ciśnienia. Najczęściej spotykanym w praktyce przykładem gazu wilgotnego jest powietrze wilgotne nawilżone parą wodną, w zakresie parametrów bliskich parametrom otoczenia. Podczas przemian, jakim podlega powietrze wilgotne ilość zawartej w nim pary wodnej może się zwiększać w wyniku parowania kontaktującej się z nim cieczy, lub też pary tej może ubywać, w wyniku procesu odwrotnego. Skład pozostałej części powietrza wilgotnego nie ulega zmianie.

Nie zmieniającą stanu skupienia część gazu wilgotnego nazywamy gazem suchym i dotyczące jej wielkości będziemy oznaczali dolnym indeksem ()_g. Substancję nawilżającą nazywamy wilgocią i oznaczamy dolnym indeksem ()_p.

W odróżnieniu od składników zwykłej mieszaniny, wilgoć w stanie gazowym nie może być zawarta w gazie wilgotnym w dowolnej ilości. Jej udział jest ograniczony taką ilością, przy której ciśnienie cząstkowe pary jest równe ciśnieniu nasycenia p_s odpowiadającemu temperaturze gazu wilgotnego. Ciśnienie cząstkowe pary wilgoci spełnia zatem warunek

$$p_p \leq p_s. \quad (9.1)$$

Np. dla powietrza o temperaturze 20°C, nawilżonego parą wodną ciśnienie cząstkowe pary wodnej wynosi 0,023 bar, a zatem przy ciśnieniu 1 bar udział objętościowy pary wodnej w powietrzu nie może

przekroczyć 2,3%. Gaz, dla którego $p_p = p_s$ jest gazem nasyconym wilgocią. Dodatkowa wilgoć ponad tą, która powoduje nasycenie gazu, występuje w postaci ciekłej. Jeżeli są to drobne kropelki ciec lub zawieszony w gazie wilgotnym, to mówimy wówczas, że gaz jest **z a m g l o n y**.

Podane niżej równania opisujące termiczny i kaloryczny stan gazu wilgotnego oparte są na założeniu, że wszystkie składniki gazu wilgotnego zachowują się jak gazy doskonałe. W przypadku powietrza zawilżonego parą wodną, o parametrach niewiele odbiegających od parametrów otoczenia, ciśnienie cząstkowe pary wodnej jest tak małe, że nawet gdy jest ona parą nasyconą suchą (powietrze nasycone wilgocią), może być traktowana jak gaz doskonały. Stosowanie praw gazu doskonałego do powietrza w warunkach atmosferycznych nie budzi zastrzeżeń.

Przyjęte założenie upoważnia m.in. do stosowania do gazu wilgotnego prawa Daltona, w myśl którego ciśnienie gazu wilgotnego jest sumą ciśnień cząstkowych gazu suchego i pary

$$p = p_g + p_p \quad (9.2)$$

Ograniczenia nałożone na zawartość pary w gazie wilgotnym, wynikające z warunku (9.1) sprawiają, że dla określenia tej zawartości stosujemy tzw. **w i l g o t n o ś ć w z g l ę d n ą**. Wyraża ona stosunek masy pary m_p zawartej w pewnej objętości gazu wilgotnego do maksymalnej zawartości pary m_p'' w tej objętości przy takiej samej temperaturze

$$\varphi = \left(\frac{m_p}{m_p''} \right)_{t,v} \quad (9.3)$$

Para wodna przy tej maksymalnej zawartości jest parą nasyconą suchą, stąd oznaczenie m_p'' . Dzieląc licznik i mianownik ułamka (9.3) przez objętość V otrzymujemy stosunek gęstości

$$\varphi = \left(\frac{\rho_p}{\rho_p''} \right)_t \quad (9.4)$$

Stosując prawa gazu doskonałego mamy

$$\rho_p = \frac{p_p}{R_p T}$$

$$\rho_p'' = \frac{p_s}{R_p T},$$

gdzie p_s jest ciśnieniem nasycenia dla temperatury T . Podstawienie powyższych zależności do równania (9.4) daje równanie

$$\varphi = \left(\frac{p_p}{p_s} \right)_t \quad (9.5)$$

przydatne do praktycznych obliczeń.

Dla sporządzenia bilansów masowych przemian gazów wilgotnych przydatny jest **s t o p i e ń z a w i l ż e n i a g a z u**, zwany również **w i l g o t n o ś c i ą b e z w z g l ę d n ą**

$$X = \frac{m_p}{m_g} \quad (9.6)$$

Stopień zawilżenia jest bezwymiarowy. Jednakże niekiedy używa się sztucznego wymiaru kg wilgoci/kg gazu suchego. Wielkość ta różni się od udziału masowego tym, że wielkością odniesienia jest nie cała masa mieszaniny (gazu wilgotnego), lecz masa gazu suchego. Za takim ujęciem przemawia fakt, że w przemianach gazu wilgotnego ilość wilgoci zawartej w gazie wilgotnym, a więc i masa gazu wilgotnego ulega zmianie, natomiast ilość gazu suchego jest stała. Np. gorące powietrze przepływające przez suszarnię nasycy się wilgocią, a więc strumień wilgoci zawartej w powietrzu wypływającym \dot{m}_{p2} jest większy od strumienia wilgoci dopływającej \dot{m}_{p1} o strumień masy wilgoci odbieranej od materiału suszonego \dot{m}_w

$$\dot{m}_{p2} = \dot{m}_{p1} + \dot{m}_w$$

Dzięki zdefiniowaniu stopnia zawilżenia w sposób określony równaniem (9.6), a nie jako udział masowy, możemy powyższe równanie zapisać następująco

$$\dot{m}_w = \dot{m}_g (X_2 - X_1),$$

gdź $\dot{m}_{g1} = \dot{m}_{g2} = \dot{m}_g$.

Przy pomiarach stanu termicznego gazu wilgotnego mierzymy jego ciśnienie p , temperaturę t i wilgotność względną φ . Dla temperatury t znajdujemy ciśnienie nasycenia pary p_s i z równania (9.5) obliczamy ciśnienie cząstkowe pary wodnej

$$p_p = \varphi p_s. \quad (9.7)$$

Ciśnienie cząstkowe gazu suchego wynika z prawa Daltona (9.2)

$$p_g = p - \varphi p_s. \quad (9.8)$$

Wyrażając masę pary i gazu suchego z równania Clapeyrona

$$m_p = \frac{p_p V}{R_p T}$$

$$m_g = \frac{p_g V}{R_g T}$$

i wstawiając do równania (9.6) otrzymujemy

$$X = \frac{R_g}{R_p} \cdot \frac{p_p}{p_g},$$

a po uwzględnieniu (9.7) i (9.8) oraz odwrotnej proporcjonalności indywidualnej stałej gazowej do masy drobinowej (równ. (2.23))

$$X = \frac{M_p}{M_g} \cdot \frac{\varphi p_s}{p - \varphi p_s}. \quad (9.9)$$

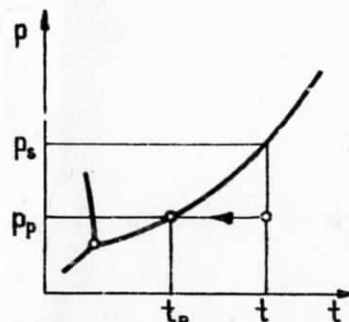
Dla powietrza zawilżonego parą wodną

$$\frac{M_p}{M_g} = \frac{M_{H_2O}}{M_{pow.}} = 0,622.$$

Przy maksymalnej zawartości pary w gazie wilgotnym $\varphi = 1$ i odpowiadający temu stanowi stopień zawilżenia wynosi

$$X'' = \frac{M_p}{M_g} \cdot \frac{p_s}{p - p_s}. \quad (9.10)$$

Jeżeli $X > X''$ gaz jest zamglony i wówczas X'' wilgoci jest w stanie pary (nasyconej suchej), reszta tzn. $(X - X'')$ w postaci cieczy (mgła).



Rys. 9.1. Punkt rosy na wykresie p-t

Parametrem związanym ze stanem termicznym gazu wilgotnego jest tzw. temperatura punktu rosy t_R . Jest to temperatura, do której należy ochłodzić izobarycznie gaz wilgotny przy $X = \text{idem}$, by uzyskać gaz nasycony wilgocią ($\varphi = 1$, $X = X''$). Przy takim ochłodzeniu nie zmienia się ciśnienie cząstkowe pary ($p_p = \text{idem}$), natomiast wraz ze spadkiem temperatury maleje ciśnienie nasycenia i dla $t = t_R$, $p_p = p_s(t_R)$. Zmierzenie temperatury t gazu wilgotnego i temperatury punktu rosy t_R umożliwia obliczenie wilgotności względnej

$$\varphi = \frac{p_s(t_R)}{p_s(t)}. \quad (9.11)$$

9.2. Termiczne równanie stanu gazu wilgotnego

Gaz wilgotny, traktowany jako mieszanina gazów doskonałych, spełnia równanie Clapeyrona

$$pv = RT,$$

przy czym indywidualną stałą gazową obliczamy z równania

$$R = \frac{R_g + X R_p}{1 + X} \quad (9.12)$$

wywodzącego się z równania (7.14), po uwzględnieniu, że udziały wagowe gazu suchego i pary wynoszą odpowiednio

$$\xi_g = \frac{1}{1 + X},$$

$$\xi_p = \frac{X}{1 + X}.$$

Gęstość gazu wilgotnego można wyznaczyć wprost z równania stanu

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

stosując stałą gazową (9.12). Można także wyjść z następującej zależności

$$\rho = \frac{m_g + m_p}{V} = \frac{m_g}{V} + \frac{m_p}{V} = \rho_g + \rho_p,$$

która po uwzględnieniu równania (9.5) przyjmuje postać

$$\rho = \rho_g + \varphi \rho'' \quad (9.13)$$

Gęstość gazu suchego obliczamy z równania Clapeyrona dla ciśnienia cząstkowego tego gazu

$$\rho_g = \frac{p - \varphi p_s}{R_g T}, \quad (9.14)$$

a gęstość pary nasyconej suchej ρ'' odczytujemy z tablicy 6.

9.3. Kaloryczne równanie stanu gazu wilgotnego

Entalpię właściwą gazu wilgotnego określamy jako entalpię jednostki masy gazu wilgotnego zawierającej 1 kg gazu suchego, lub (1+X) kg gazu wilgotnego. Entalpię gazu wilgotnego obliczymy zatem mnożąc entalpię właściwą przez masę gazu suchego

$$I = m_g i \quad (9.15)$$

i podobnie strumień entalpii

$$\dot{I} = \dot{m}_g i. \quad (9.16)$$

W ogólnym przypadku entalpię właściwą gazu wilgotnego obliczamy z równań:

dla $X \leq X''$

$$i = i_g + X i_p, \quad (9.17)$$

a dla $X > X''$

$$i = i_g + X'' i_p + (X - X'') i_w. \quad (9.18)$$

W równaniach tych i_g , i_p , i_w oznaczają zwykłe entalpie właściwe (odniesione do 1 kg czynnika) odpowiednio gazu suchego, pary czynnika nawilżającego i cieczy czynnika nawilżającego, wyznaczone dla odpowiednio przyjętego poziomu odniesienia.

Dla powietrza wilgotnego zawilżonego parą wodną jako poziom odniesienia przyjmuje się 0°C i zerowe wartości entalpii gazu suchego oraz ciekłej wody. Entalpia pary w tym stanie

odniesienia jest równa utajonemu ciepłu parowania $r_0 = 2501 \text{ kJ/kg}$ (ekstrapolujemy tu krzywą parowania o $0,01^\circ\text{C}$ poniżej punktu potrójnego, przyjmując utajone ciepło parowania jak dla punktu potrójnego). Opierając się na założeniu doskonałości wszystkich składników powietrza wilgotnego, wyznaczmy entalpie właściwe gazu suchego, pary i cieczy dla temperatury $t \text{ } ^\circ\text{C}$

$$i_g = c_{pg} t,$$

$$i_p = r_0 + c_{pp} t,$$

$$i_w = c_{pw} t,$$

co po uwzględnieniu w równaniach (9.17) i (9.18) daje:
dla $X \leq X''$

$$i = c_{pg} t + X(r_0 + c_{pp} t), \quad (9.19)$$

dla $X > X''$

$$i = c_{pg} t + X''(r_0 + c_{pp} t) + (X - X'') c_{pw} t. \quad (9.20)$$

Ciepła właściwe mają wartości następujące: dla gazu suchego $c_{pg} = 1,006 \text{ kJ/(kg deg)}$, dla pary $c_{pp} = 1,93 \text{ kJ/(kg deg)}$, dla wody $c_{pw} = 4,19 \text{ kJ/(kg deg)}$.

Energię wewnętrzną właściwą, określoną również z zależności podobnej do (9.15)

$$U = m_g u, \quad (9.21)$$

obliczamy z funkcji Gibbsa

$$U = I - pV.$$

Po podzieleniu przez m_g

$$\frac{U}{m_g} = \frac{I}{m_g} - p \frac{V}{m_g}$$

i uwzględnieniu (9.15), (9.20) oraz tego, że $v_g = V/m_g$, otrzymujemy

$$u = i - p v_g.$$

Można jeszcze objętość właściwą gazu suchego obliczyć z równania Clapeyrona

$$v_g = \frac{R_g T}{p - \varphi p_g},$$

a więc ostatecznie

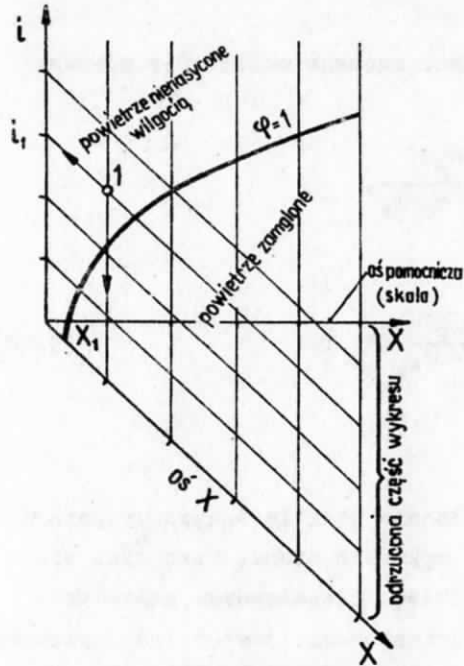
$$u = i - \frac{p}{p - \varphi p_g} R_g T. \quad (9.22)$$

9.4. Wykres i-X.

Stan gazu wilgotnego można, podobnie jak dla innych czynników termodynamicznych, przedstawić na wykresie stanu. Stan gazu wilgotnego jest określony za pomocą trzech niezależnych parametrów stanu, gdyż ilość stopni swobody zmiany stanu jest o jeden większa w stosunku do substancji czystej (możliwość zmiany składu - zawartości wilgoci). Aby umożliwić przedstawianie stanu gazu wilgotnego na płaskim wykresie trzeba więc ustalić jeden z parametrów stanu. Najdogodniej jako parametr ten obrać ciśnienie, gdyż większość procesów, jakim podlega gaz wilgotny, przebiega przy stałym lub przy prawie stałym ciśnieniu, równym ciśnieniu atmosferycznemu. Jako współrzędne tego izobarycznego wykresu przyjmujemy entalpię właściwą i stopień zawilżenia. Ciśnienie, dla którego jest sporządzony wykres jest na ogół równe 1 bar lub 1 atm.

Linia $\varphi = 1$ (100%) rozdziela wykres i-X na dwa obszary: gazu nienasyconego wilgocią i gazu zamglonego. Z uwagi na zastosowania praktyczne najbardziej interesujący jest obszar gazu nienasyconego wilgocią. By obszar ten odpowiednio wyeksponować sporządzamy wykres we współrzędnych ukośnokątnych, a następnie obcinamy zbędną

część obszaru gazu zamglonego przenosząc skalę z właściwej osi X na oś pomocniczą (rys. 9.2).



Rys. 9.2. Ukośnokątny wykres i-X

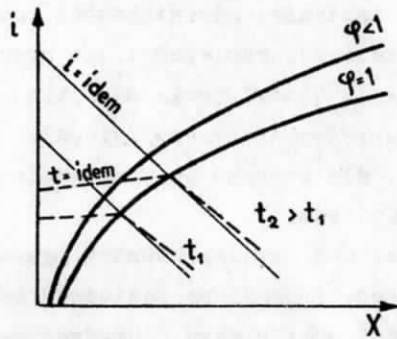
Po tym obcięciu wykres i-X tylko z pozoru wygląda jak prostokątny. Należy o tym pamiętać przy odczytywaniu entalpii - z danego punktu trzeba poprowadzić odnoszącą w kierunku osi i, równoległą do właściwej (ukośnej) osi X. Na rysunku 9.3 pokazano przebieg linii $\varphi = \text{idem}$ i $t = \text{idem}$ na wykresie i-X. Zakłamanie izotermy na linii $\varphi = 1$ wynika z nieciągłości pochodnej $(\frac{\partial i}{\partial X})_t$. Po zróżniczkowaniu równań (9.19) i (9.20) otrzymujemy: dla $X \leq X''$

$$(\frac{\partial i}{\partial X})_t = r_0 + c_{pp} t,$$

a dla $X > X''$

$$(\frac{\partial i}{\partial X})_t = c_{pw} t.$$

We wklejce do skryptu znajduje się wykres i-X dla powietrza zawilgoconego parą wodną, pod ciśnieniem $p = 1 \text{ bar}$. Wykres zawiera ponadto podziałkę umożliwiającą odczytywanie ciśnienia nasycenia.



Rys. 9.3. Wykres i-X

9.5. Typowe przemiany izobaryczne gazu wilgotnego

9.5.1. Przemiana $X = \text{idem}$

Jeżeli podczas przemiany do gazu wilgotnego nie jest dostarczana ani wyprowadzana wilgoć, to stopień zawilżenia pozostaje niezmienny. Przemiana taka nie musi być oczywiście izobaryczna. Jeżeli jednak $p = \text{idem}$, to z parametrów termicznych zmianie podlega tylko temperatura i wilgotność względna. Jeżeli podczas tej przemiany cała wilgoć jest w postaci pary, to ze stałości zawartości wilgoci i stałości ciśnienia wynika stałość ciśnienia cząstkowego pary

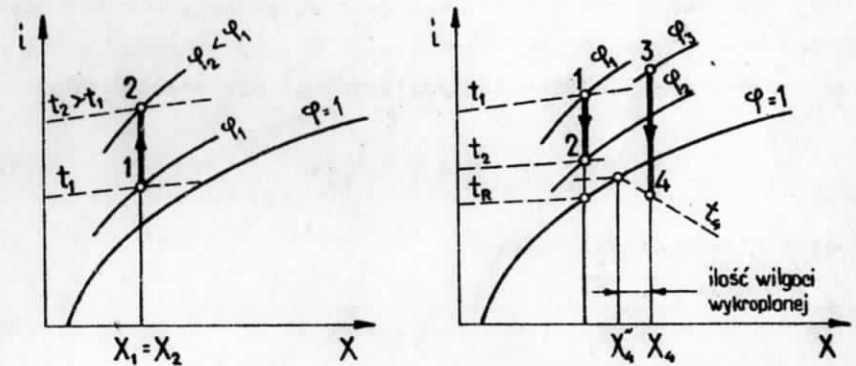
$$p_p = \text{idem},$$

lub

$$p_{p2} = p_{p1}.$$

Korzystając z zależności (9.7) otrzymujemy

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{p_{s1}}{p_{s2}} \quad (9.23)$$



Rys. 9.4. Przemiana $X = \text{idem}$: a) podgrzewanie, b) chłodzenie

Przy ogrzewaniu gazu wilgotnego (rys. 9.4a) $t_2 > t_1$, $p_{s2} > p_{s1}$ i wilgotność względna maleje. Ponieważ spadek wilgotności względnej powoduje zwiększenie chłonności pary przez gaz wilgotny, przemiana taka jest stosowana jako proces wstępny w suszarni. Takie względne osuszenie powietrza wilgotnego obserwujemy w zimie - powietrze napływające z zewnątrz do ogrzewanego pomieszczenia (wskutek naturalnej wymiany przez nieszczelności, otwieranie okien, drzwi) ulega ogrzaniu i jego wilgotność względna maleje, co daje nam odczucie suchości.

Przy ochładzaniu gazu wilgotnego (rys. 9.4b) jego wilgotność względna rośnie. Punkt R, w którym $\varphi = 1$ jest punktem rosy, a odpowiadająca mu temperatura temperaturą punktu rosy. Przy ochłodzeniu gazu wilgotnego poniżej punktu rosy otrzymamy gaz zamglony. Ilość wilgoci, która wydzieli się z jednostki masy gazu suchego wynosi

$$\Delta X = X_1 - X_2''(t_2). \quad (9.24)$$

Ochładzanie poniżej temperatury punktu rosy jest jednym ze sposobów osuszania gazu wilgotnego.

9.5.2. Mieszanie dwóch strumieni gazu wilgotnego

Przy zmieszaniu dwóch strumieni gazu wilgotnego strumień masy gazu suchego opuszczającego mieszalnik \dot{m}_{g3} jest równy sumie strumieni mas gazu suchego dopływających do mieszalnika \dot{m}_{g1} i \dot{m}_{g2}

$$\dot{m}_{g3} = \dot{m}_{g1} + \dot{m}_{g2}. \quad (9.25)$$

Podobnie bilansuje się wilgoć

$$\dot{m}_{p3} = \dot{m}_{p1} + \dot{m}_{p2}. \quad (9.26)$$

Korzystając z definicji stopnia zawilżenia (9.6) otrzymujemy

$$\dot{m}_{g3} X_3 = \dot{m}_{g1} X_1 + \dot{m}_{g2} X_2,$$

a po uwzględnieniu (9.25)

$$X_3 = \frac{\dot{m}_{g1} X_1 + \dot{m}_{g2} X_2}{\dot{m}_{g1} + \dot{m}_{g2}}. \quad (9.27)$$

Jeżeli mieszalnik jest adiabatyczny i prędkości przepływu są nie-duże, to strumień entalpii mieszaniny jest sumą strumieni entalpii mieszanych gazów

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2. \quad (9.28)$$

Zapisując strumień entalpii za pomocą entalpii właściwej (równanie 9.16) otrzymujemy

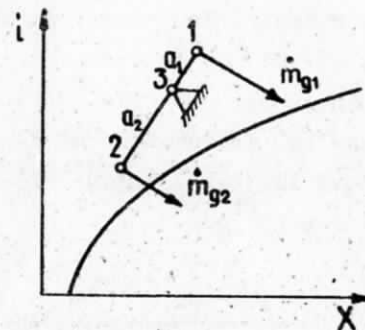
$$\dot{m}_{g3} i_3 = \dot{m}_{g1} i_1 + \dot{m}_{g2} i_2,$$

a po uwzględnieniu (9.26) mamy

$$i_3 = \frac{\dot{m}_{g1} i_1 + \dot{m}_{g2} i_2}{\dot{m}_{g1} + \dot{m}_{g2}}. \quad (9.29)$$

Jak widać z równań (9.27) i (9.29), współrzędne X_3 oraz i_3 punktu odpowiadającego stanowi mieszaniny są średnimi ważonymi

współrzędnych punktów odpowiadających stanom 1 i 2 mieszanych strumieni gazu wilgotnego. Wagi są udziały mas strumieni gazu suchego gazów mieszanych w strumieniu gazu suchego mieszaniny, tzn. $\dot{m}_{g1}/(\dot{m}_{g1} + \dot{m}_{g2})$ i $\dot{m}_{g2}/(\dot{m}_{g1} + \dot{m}_{g2})$. Geometrycznie oznacza to, że punkt 3 leży na prostej łączącej punkty 1 i 2 (rys. 9.5), a jego położenie wyznacza reguła dźwigni - dźwignia podparta w tym punkcie

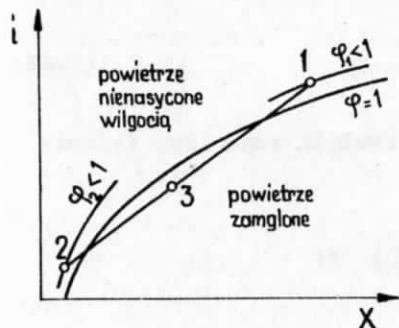


Rys. 9.5. Mieszanie gazów wilgotnych

i obciążona siłami proporcjonalnymi do mas gazu suchego \dot{m}_{g1} i \dot{m}_{g2} pozostanie w równowadze

$$\dot{m}_{g1} a_1 = \dot{m}_{g2} a_2 \quad (9.30)$$

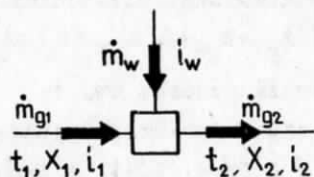
Wbrew pozorom wilgotność względna mieszaniny φ_3 nie musi być pośrednią pomiędzy wilgotnościami względnymi strumieni mieszanych φ_1 i φ_2 . Może ona przekraczać obie wartości φ_1 i φ_2 , a w szczególnych przypadkach stan mieszaniny dwóch strumieni gazów wilgotnych niezamglonych ($\varphi_1 < 1$, $\varphi_2 < 1$) może znaleźć się w obszarze gazu zamglonego (rys. 9.6).



Rys. 9.6. Szczególny przypadek mieszania gazów wilgotnych

9.5.3. Nawilżanie gazu wilgotnego strumieniem wilgoci

Strumień gazu wilgotnego o parametrach oznaczonych indeksem 1 miesza się ze strumieniem wilgoci o parametrach oznaczonych indeksem w. W wyniku izobarycznego i adiabatycznego mieszania otrzymujemy strumień gazu wilgotnego o parametrach oznaczonych indeksem 2 (rys. 9.7). Wilgoć może być dostarczana w postaci cieczy lub pary. Bilans wilgoci jest następujący



$$\dot{m}_{p1} + \dot{m}_w = \dot{m}_{p2}$$

Rys. 9.7. Nawilżanie gazu wilgotnego strumieniem wilgoci

a po uwzględnieniu równania (9.6) i po prostym przekształceniu

$$\dot{m}_g (X_2 - X_1) = \dot{m}_w \quad (9.31)$$

Podobnie bilans energii

$$\dot{m}_g i_1 + \dot{m}_w i_w = \dot{m}_g i_2$$

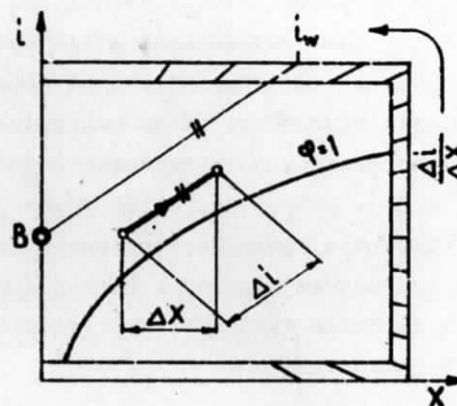
po przekształceniu daje równanie

$$\dot{m}_g (i_2 - i_1) = \dot{m}_w i_w \quad (9.32)$$

Dzieląc stronami równanie (9.32) przez (9.31) otrzymujemy zależność

$$\frac{i_2 - i_1}{X_2 - X_1} = i_w \quad (9.32)$$

z której wynika, że proces nawilżania strumienia gazu wilgotnego przedstawia na wykresie i-X prosta wychodząca z punktu 1 (stan początkowy), której nachylenie zależy wyłącznie od entalpii dostarczanej wilgoci i_w , nie zależy natomiast od intensywności nawilżenia (odległość punktu 2 od punktu 1). Dla praktycznego wykreślenia przemian nawilżania na wykresie i-X wykres ten jest uzupełniony na obrzeżu (ramce) podziałką kierunkową wyskalowaną w wartościach entalpii i_w . Połączenie odpowiedniego punktu tej skali z jednym wspólnym punktem na wykresie, zwanym biegunem wyznacza kierunek przemiany. Linia przemiany będzie równoległa do niej, przechodzącą przez punkt 1. Konstrukcję przemiany na wykresie i-X pokazano na



Rys. 9.8. Graficzna interpretacja nawilżania gazu wilgotnego strumieniem wilgoci

przemiany nawilżania wyznaczamy ze znajomości jednego z parametrów końcowych (np. t_2, φ_2, X_2).

rys. 9.8. Położenie punktu końcowego 2 na prostej

R o z d z i a ł 10

OBIEG I - TERMODYNAMICZNE

10.1. Definicje i zależności ogólne

Obiegiem termodynamicznym nazywamy przemianę lub cykl zamkniętych ($m = \text{idem}$) przemian fizycznych, po których czynnik powraca do stanu początkowego. Pod przemianą fizyczną rozumiemy przemianę podczas której zmienia się tylko stan termiczny czynnika (łącznie z ewentualnymi zmianami stanu skupienia), nie mogą natomiast zachodzić reakcje chemiczne.

Na dowolnym wykresie stanu czynnika przemianę obrazuje linia ciągła łącząca punkty odpowiadające stanom początkowemu i końcowemu. Ilustracją obiegu jest zatem zamknięty kontur. W zależności od kierunku realizacji przemiany obiegu, tzn. od kierunku poruszania się po tym konturze, dzielimy obiegi na prawobieżne i lewobieżne.

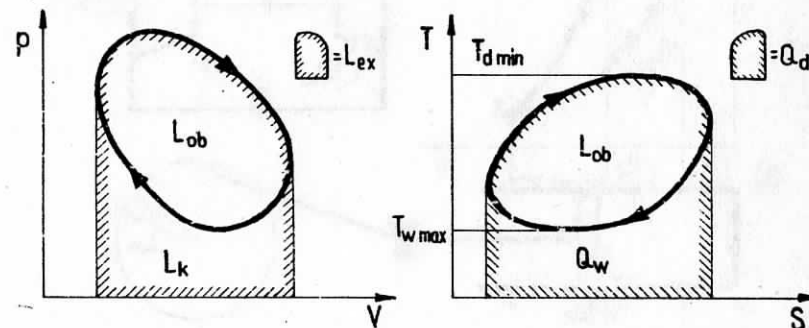
Obieg prawobieżny jest realizowany w ten sposób, że kierunek poruszania się po linii przedstawiającej na dowolnym wykresie stanu obieg jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Na rysunku 10.1 przedstawiono graficzną interpretację obiegu prawobieżnego na wykresach p - V i T - S . Jak widać, obieg można podzielić na dwie części. Jedną to ekspansję czynnika, podczas której jest wykonywana praca L_{ex} , drugą to kompresję podczas której jest wkładana do czynnika praca kompresji. Praca ekspansji jest większa od pracy kompresji, a różnica jest pracą obiegu

$$L_{ob} = L_{ex} - L_k \quad (10.1)$$

Podobnie można dokonać podziału obiegu na dwie inne części różniące się od siebie kierunkiem przepływu ciepła. Podczas jednej jest dostarczone ciepło Q_d , podczas drugiej wyprowadzone ciepło Q_w .

Na wykresie T - S (rys. 10.1) naniesiono ekstremalne temperatury źródeł ciepła zapewniające dopływ i odpływ ciepła do i od czynnika (ciepło nie może płynąć w kierunku wzrostu temperatury). Źródło dostarczające ciepło musi mieć co najmniej temperaturę $T_{d \min}$ równą maksymalnej temperaturze czynnika podczas obiegu, a źródło odbierające ciepło co najwyżej temperaturę $T_{w \max}$ równą minimalnej temperaturze czynnika. Różnica ciepła dostarczonego i wyprowadzonego, na mocy pierwszej zasady termodynamiki, jest pracą obiegu

$$L_{ob} = Q_d - Q_w \quad (10.2)$$



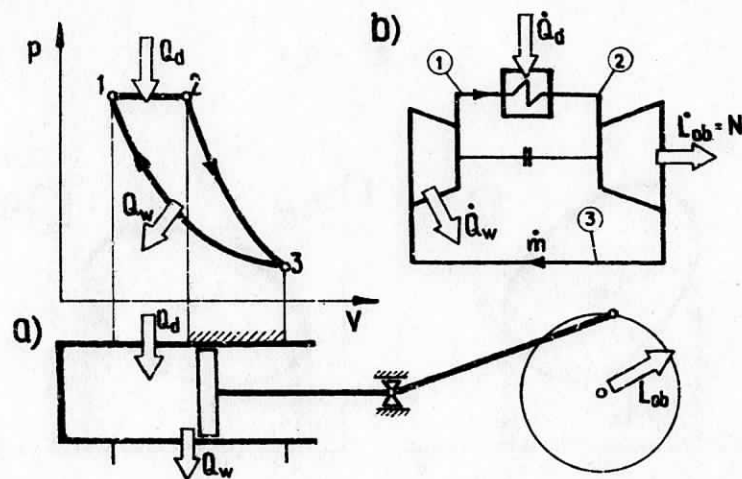
Rys. 10.1. Obieg prawobieżny na wykresach p - V i T - S

Interpretacja ciepła i pracy w postaci pól, przedstawiona na rysunku 10.1, jest ściśła dla przemian beztarciowych (odwracalnych lub pseudoodwracalnych).

Jak widać z powyższego, urządzenie które realizuje obieg prawobieżny pobiera ciepło ze źródła o temperaturze wyższej, część tego ciepła zamienia na pracę, resztę przekazuje do źródła o temperaturze niższej. Urządzenie to jest więc silnikiem.

Podobnie można wykazać, że przy realizacji obiegu lewobieżnego praca jest wkładana, a ciepło pobierane ze źródła o niższej temperaturze i przekazywane do źródła o wyższej temperaturze. Urządzenie, które realizuje ten obieg jest więc ziębiarką lub pompą ciepła.

Obieg termodynamiczny może być realizowany w jednym urządzeniu (cylinder zamknięty tłokiem), w którym cała masa czynnika m podlega kolejno wszystkim przemianom obiegu lub w zespole maszyn i urządzeń, z których każda realizuje jedną przemianę obiegu i przez które czynnik obiegowy przepływa ze stałym natężeniem przepływu \dot{m} . Przykład dwóch różnych sposobów realizacji tego samego obiegu pokazano na rys. 10.2. Przy realizacji obiegu w maszynie tłokowej



Rys. 10.2. Sposoby realizacji obiegu:
a) maszyna tłokowa, b) agregat przepływowy

cylinder tej maszyny musi być w odpowiednich momentach grzany (przemiana 1-2), chłodzony (przemiana 3-1) lub izolowany (przemiana 2-3). Realizacja tego praktycznie nie jest możliwa z uwagi na dużą częstotliwość cykli maszyny. Możliwe jest natomiast wytworzenie w odpowiednim momencie ciepła wewnątrz czynnika w wyniku reakcji chemicznej (np. spalanie), a zamiast oddawania ciepła na zewnątrz - wyrzucenie na zewnątrz gorącego gazu i pobranie w to miejsce gazu zimnego. Tego typu silnik będzie również działają cyklicznie, ale zachodzące w nim przemiany nie będą stanowiły obiegu (nie idem, reakcje chemiczne). Odpowiadający tym procesom i równo-

ważny im pod względem energetycznym obieg nazywamy o b i e g i e m p o r ó w n a w c z y m.

Jeżeli przez q_d , q_w i l_{ob} oznaczymy odpowiednio: jednostkowe ciepło dostarczone, jednostkowe ciepło wyprowadzone i jednostkową pracę obiegu, to ciepło i praca obiegu realizowanego w maszynie tłokowej, przypadające na jeden cykl, wyrażają się równaniami

$$Q_d = m q_d, \quad (10.3)$$

$$Q_w = m q_w, \quad (10.4)$$

$$L_{ob} = m l_{ob}, \quad (10.5)$$

gdzie m jest masą czynnika podlegającego obiegowi. Jeżeli maszyna ta wykonuje \dot{n}_o cykli w jednostce czasu, to strumienie ciepła i moc obliczamy z równań

$$\dot{Q}_d = \dot{n}_o Q_d, \quad (10.6)$$

$$\dot{Q}_w = \dot{n}_o Q_w, \quad (10.7)$$

$$N = \dot{n}_o L_{ob}. \quad (10.8)$$

Natomiast dla obiegu realizowanego w zespole maszyn przepływowych

$$\dot{Q}_d = \dot{m} q_d, \quad (10.9)$$

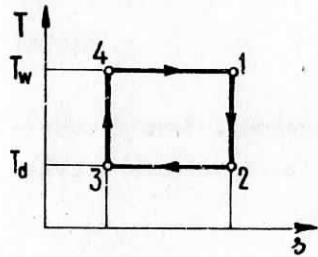
$$\dot{Q}_w = \dot{m} q_w, \quad (10.10)$$

$$N = \dot{m} l_{ob}. \quad (10.11)$$

gdzie \dot{m} jest natężeniem przepływu czynnika obiegowego.

Między dwoma źródłami ciepła o danych temperaturach można zrealizować różne obiegi złożone z różnych przemian i posiadające różne sprawności. Różnica w sprawności różnych obiegów działających pomiędzy tymi samymi źródłami ciepła wynika z różnego stopnia nieodwracalności obiegu - im bardziej nieodwracalny obieg, tym mniej-

sza jego sprawność. Największą natomiast sprawność posiada obieg odwracalny (rozdział 5). Przy nałożonych na wstępie ograniczeniach na przemiany obiegu jedynymi przyczynami ich nieodwracalności mogą być: tarcie i przepływ ciepła pomiędzy źródłem ciepła i czynnikiem przy skończonej różnicy temperatur. Realizując dostatecznie powoli przemiany obiegu można wyeliminować tarcie. Natomiast eliminacja nieodwracalności przepływu ciepła przy stałej temperaturze źródła ciepła wyklucza wszystkie przemiany, z wyjątkiem izotermy (stała



Rys. 10.3. Prawobieżny obieg Carnota

temperatura nieskończenie mała różniąca się od temperatury źródła ciepła) i adiabaty (brak wymiany ciepła). Pozostałe przemiany charakteryzują się zmiennością temperatury czynnika, co przy stałej temperaturze źródła ciepła sprawia, że mogą być co najwyżej pseudoodwracalne. W pełni odwracalny obieg składa się więc z adiabat i izoterm. Obieg ten nazywa się obiegami Carnota.

Na rysunku 10.3 pokazano wykres T-s prawobieżnego obiegu Carnota realizowanego w silniku Carnota. Łatwo sprawdzić, że obieg ten ma sprawność taką, jaką wyznaczyliśmy w oparciu o II zasadę termodynamiki (równ. (5.44)). Mamy bowiem

$$Q_d = Q_{4-1} = T_d (S_1 - S_4),$$

$$Q_w = -Q_{2-3} = T_w (S_2 - S_3)$$

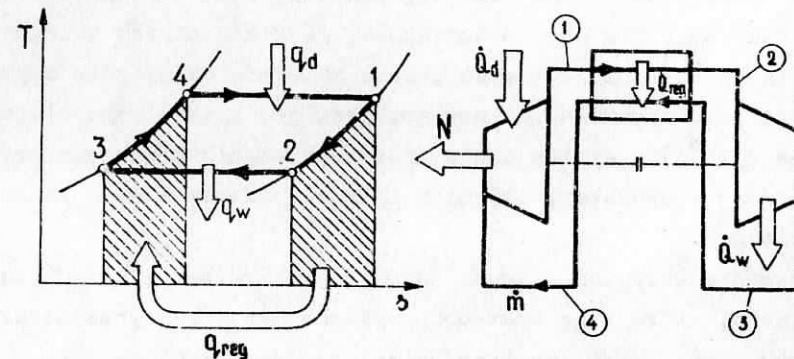
i dalej, na mocy definicji sprawności

$$\eta = 1 - \frac{Q_w}{Q_d} = 1 - \frac{T_w (S_2 - S_3)}{T_d (S_1 - S_4)}$$

Ponieważ $S_2 - S_3 = S_1 - S_4$, więc

$$\eta = 1 - \frac{T_w}{T_d}$$

Opisana wyżej realizacja obiegu odwracalnego, w postaci obiegu Carnota, nie jest jedyną. Inna realizacja musi zachować dwie przemiany izotermiczne, podczas których zachodzi odwracalna wymiana ciepła ze źródłami ciepła. Adiabaty natomiast można zastąpić innymi przemianami podczas których czynnik wymienia ciepło zmieniając jednocześnie swą temperaturę. Ażebym wymiana ciepła była odwracalna, czynnik musi kontaktować się z ciałem o temperaturze zmieniającej się tak jak jego temperatura. Ponieważ nie ma takich źródeł ciepła, najprościej kontaktować jedną porcję czynnika z drugą, która zmienia swoją temperaturę w takim samym tempie, wymieniając ciepło w kierunku przeciwnym. Można to zrealizować w agregacie przepływowym za pomocą dwóch przemian izobarycznych, podczas których dwa strumienie czynnika (o tym samym natężeniu przepływu) przekazują sobie energię w przeciwprądowym wymienniku ciepła. Tego rodzaju rozwiązanie nazywamy regeneracją ciepła. Odwracalny obieg z regeneracją ciepła pokazano na rysunku 10.4. Udoskonalanie obiegów rzeczywistych polega na maksymalnym ich przybliżeniu do obiegu odwracalnego przez zastosowanie przemian występujących w obiegu odwracalnym. Realizacja przemiany izotermicznej gazu jest kłopotliwa, bo trudno jednocześnie czynnik rozpręczać i dostarczać



Rys. 10.4. Odwracalny obieg z regeneracją ciepła

mu ciepło w takiej ilości, by utrzymać stałą jego temperaturę i tak samo przy sprężaniu. Można natomiast bez trudności zrealizować tę przemianę przy zmianie stanu skupienia, bo wówczas izobara jest izoterma, a w agregacie przepływowym realizacja izobary jest niesłychanie prosta. Z tych to powodów, jako czynników obiegowych używa się często substancji zmieniających swój stan skupienia w czasie przemian obiegu. Daje to jeszcze dodatkowe korzyści wynikające stąd, że zmiany stanu skupienia są znacznie bardziej energochłonne od zwykłych przemian, można więc zrealizować obieg przy pomocy znacznie mniejszej ilości czynnika.

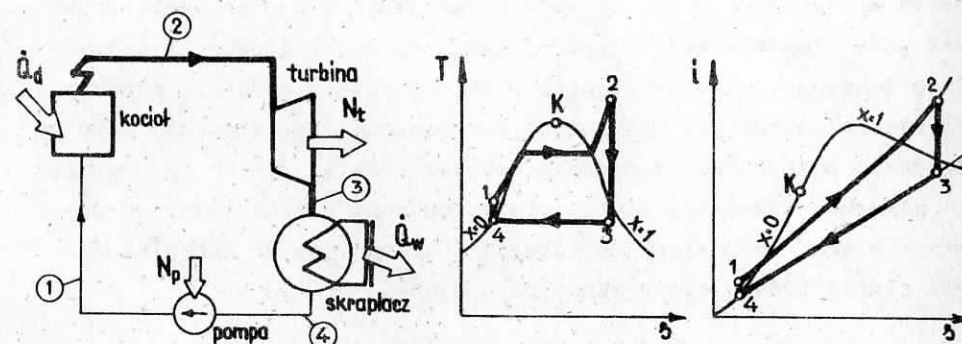
10.2. Obieg siłowni parowej

Siłownie parowe są największymi, w skali działalności człowieka producentami pracy z energii cieplnej. Siłownia parowa najczęściej jest elektrownią, gdyż olbrzymią większość wytwarzanej pracy jest natychmiast przetwarzana w energię elektryczną równoważną pracy, lecz wygodniejszą do przesyłania. Jednak z punktu widzenia termodynamiki nie są istotne dalsze losy pracy wytworzonej w silniku (a takim właśnie dużym silnikiem jest siłownia parowa). Czynnikiem obiegowym w siłowni parowej jest H_2O , przy czym podczas przemian obiegowych występują jego zmiany stanu skupienia. Zaletą wody, jako czynnika termodynamicznego jest jej taniać, choć nie jest to substancja tak tania jak woda wodociągowa, gdyż czynnikiem obiegowym w nowoczesnej siłowni jest woda prawie zupełnie chemicznie czysta. Wadą wody, jako czynnika obiegowego, jest jej niska temperatura krytyczna ($375^{\circ}C$) w wyniku czego proces parowania przebiega przy dużej różnicy temperatur, czynnika i źródła ciepła a więc silnie nieodwracalnie.

Podstawowym obiegiem siłowni parowej jest obieg Clausiusa-Rankine'a, którego schemat oraz wykresy $T-s$ i $i-s$ przedstawiono na rysunku 10.5. Wszystkie inne obiegi są modyfikacjami tego obiegu, zmierzającymi do polepszenia jego sprawności. Przedstawiony obieg jest obiegiem teoretycznym - jego składowe przemiany są odwracalne lub pseudoodwracalne.

W siłowni przetwarzającej energię chemiczną paliwa rolę górnego źródła ciepła spełnia kocioł, w siłowni jądrowej reaktor. Temperatura spalin w kotle, którą możemy uważać za temperaturę źródła ciepła, zależy od rodzaju paliwa, ale zawsze jest ona rzędu tysiąca kilkuset stopni. Niska wytrzymałość materiałów konstrukcyjnych kotła i turbiny uniemożliwia pełne wykorzystanie tej temperatury. W praktyce z tej wysokiej temperatury źródła ciepła wykorzystujemy temperaturę rzędu $600^{\circ}C$. Ale i ta obniżona temperatura źródła ciepła nie jest wykorzystana w sposób odwracalny. Przyczyną jest poruszona już wyżej - niska wartość temperatury krytycznej wody uniemożliwiająca realizację odwracalnego procesu izotermicznego przy parowaniu. Nieodwracalne jest również izobaryczne podgrzewanie wody do temperatury nasycenia. Na rysunku 10.5 przemianą zachodzącą w kotle jest przemiana 1-2. Strumień ciepła dostarczonego do czynnika wynosi

$$\dot{Q}_d = \dot{m} (i_2 - i_1), \quad (10.12)$$



Rys. 10.5. Obieg Clausiusa-Rankine'a siłowni parowej.

gdzie \dot{m} jest natężeniem przepływu czynnika obiegowego (wydajnością kotła). Przegrzana para wodna opuszczająca kocioł dopływa rurociągiem do turbiny. W obiegu teoretycznym w rurociągu nie występuje ani spadek ciśnienia, ani też strata ciepła do otoczenia.

Stan pary przed turbiną jest więc identyczny ze stanem pary za kotłem. W turbinie para rozpręża się adiabatycznie odwracalnie (przemiana 2-3) do ciśnienia p_3 , przy czym uzyskana moc jest pracą ekspansji obiegu

$$N_t = \dot{L}_{ex} = \dot{m} (i_2 - i_3). \quad (10.13)$$

Ponieważ następną przemianą jest izobaryczne skraplanie pary 3-4, ciśnienie do którego rozpręża się para w turbinie jest na tyle niskie, by skraplanie pary było realizowane przy minimalnej różnicy temperatur pary i dolnego źródła ciepła, którym jest otoczenie. Dla temperatur rzędu 30°C są to ciśnienia nasycenia rzędu 0,04-0,05 bar. W stosunku do ciśnienia otoczenia jest to więc głębokie podciśnienie (próżnia ponad 90%). Przy tak głębokim rozprężaniu następuje zwykle przekroczenie linii granicznej $x=1$ i para opuszczająca turbinę jest parą moką, przy czym stopień suchości jest tym mniejszy, im wyższe zastosujemy ciśnienie w kotle, przy tej samej temperaturze przegrzania pary. Skraplanie pary odbywa się w przeponowym wymienniku ciepła, w którym skraplająca się na powierzchni rurek para oddaje ciepło płynącej wewnątrz rurek wodzie, a dopiero woda przekazuje je do otoczenia. Obieg chłodzący może być otwarty, gdy woda chłodząca jest pobierana z otoczenia (np. z rzeki) i po podgrzaniu oddawana do otoczenia lub też może to być obieg zamknięty - gdy woda chłodząca oddaje ciepło pobrane w skraplaczu do powietrza w tzw. chłodniach kominowych i wraca znów do skraplacza. Ilość ciepła oddawanego w skraplaczu wynosi

$$\dot{Q}_w = \dot{m} (i_3 - i_4), \quad (10.14)$$

przy czym w punkcie 4 mamy ciecz o temperaturze nasycenia ($i_4=i_4'$). Ciecz ta jest następnie sprężana adiabatycznie w pompie do ciśnienia p_1 , jakie panuje w kotle. Praca sprężania (kompresji) odniesiona do czasu jest mocą pompy

$$N_p = \dot{L}_k = \dot{m} (i_1 - i_4). \quad (10.15)$$

Zgodnie z definicją sprawność obiegu

$$\eta = \frac{\dot{L}_{ob}}{\dot{Q}_d} = \frac{N_t - N_p}{\dot{Q}_d}. \quad (10.16)$$

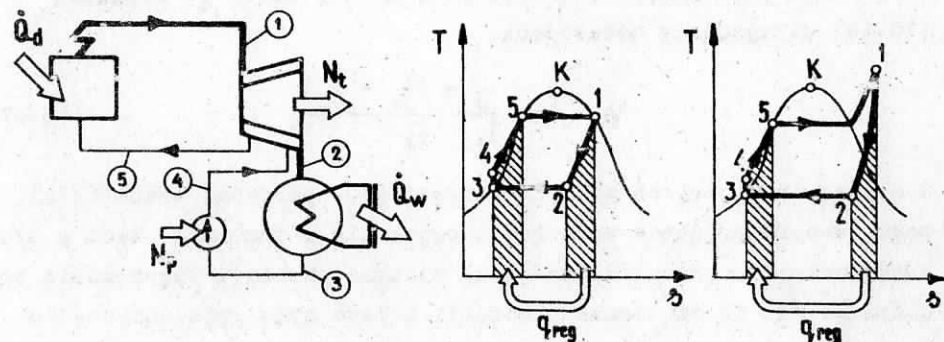
Po podstawieniu równań (10,12), (10.13) i (10.15) do równania (10.16) otrzymujemy ostatecznie

$$\eta = \frac{i_2 - i_3 - (i_1 - i_4)}{i_2 - i_1}. \quad (10.17)$$

W starszych wydaniach siłowni parowej (np. parowóz, lokomobila), przemiana rozprężania była realizowana nie w turbinie, lecz w tłokowej maszynie przepływowej (tzw. maszyna parowa). Rozprężanie to odbywało się do ciśnienia otoczenia i para była wydmuchiwana do otoczenia, z otoczenia zaś pobierano do kotła wodę. Dla takiego otwartego procesu opisany obieg Clausiusa-Rankine'a jest obiegiem porównawczym z zachowaniem wszystkich proporcji energetycznych. Z energetycznego punktu widzenia jest bowiem wszystko jedno, czy parę opuszczającą turbinę skroplimy oddając ciepło do otoczenia i uzyskane skropliny skierujemy do kotła, czy też parę tę wyrzucimy do otoczenia i z tego otoczenia pobierzemy wodę do kotła.

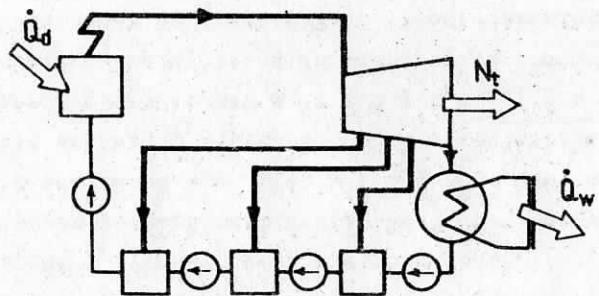
W celu polepszenia sprawności obiegu siłowni parowej zrealizowanego pomiędzy źródłami ciepła o określonych temperaturach należy uczynić bardziej odwracalnymi przemiany obiegu. Zabiegi takie nazywamy k a r n o t y z a c j ą obiegu. Jednym z nich jest usunięcie nieodwracalności podgrzewania do temperatury nasycenia wody dostarczonej przez pompę do kotła, przez zastosowanie r e g e n e r a c j i c i e p ł a. W teoretycznym modelu regeneracji ciepło potrzebne do tego podgrzania dostarcza czynnik rozprężający się w turbinie, i w tym celu woda pompowana do kotła jest przedtem przetłaczana przez odpowiedni płaszcz chłodzący w turbinie (rys. 10.6). Gdyby w obiegu użyć czynnika termodynamicznego o odpowiednio wysokiej temperaturze krytycznej, tak by nie trzeba było przegrzewać pary, to wówczas w wyniku regeneracji ciepła osiągnęlibyśmy pełną karnotyzację obiegu siłowni (rys. 10.6b). Przy

zastosowaniu pary wodnej jako czynnika obiegowego i związanej z tym konieczności przegrzewania, dla wykorzystania temperatury górnego źródła ciepła (rys. 10.6c) zastosowanie regeneracji nie daje pełnej karnotyżacji, polepsza jednak sprawność siłowni.



Rys. 10.6. Teoretyczna (ciągła) regeneracja ciepła w siłowni parowej: a) schemat cieplny, b) pełna karnotyżacja obiegu bez przegrzewania pary, c) regeneracja obiegu z przegrzewaniem pary

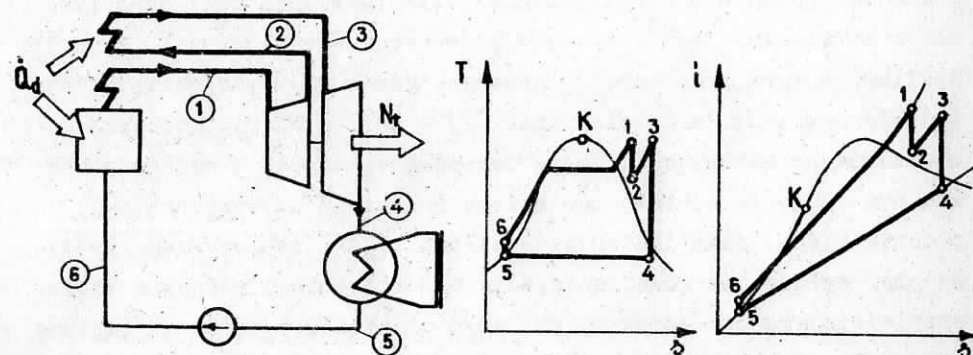
Przedstawiona na rysunku 10.6 teoretyczna koncepcja ciągłej regeneracji ciepła nie da się praktycznie zrealizować, gdyż nie jest możliwe dostatecznie intensywne odbieranie ciepła od pary podczas jej rozprężania w turbinie. Dlatego też w praktyce stosuje się inny, skokowy system regeneracji ciepła (rysunek 10.7). W czasie roz-



Rys. 10.7. Praktyczna (nieciągła) regeneracja ciepła za pomocą pary upustowej

prężania pary w turbinie odciąga się porcje pary częściowo rozprężonej z tzw. upustów regeneracyjnych (zwanymi też zaczepami) i skierowuje do ogrzewania wody przetłaczanej do kotła. Zamiast więc przekazywania przez całą masę rozprężającej się pary części swej entalpii wodzie tłoczzonej do kotła, jak to ma miejsce przy regeneracji ciągłej, tu pewne porcje rozprężającej się pary przekazują swoją nadwyżkę entalpii wodzie zasilającej kocioł. Praktyczna realizacja upustów pary (zaczepów) jest możliwa dzięki temu, że turbina parowa składa się z szeregu stopni połączonych szeregowo, w których przebiegają kolejno odcinki przemiany rozprężania adiabatycznego. Każdy stopień turbiny jest małą turbinką umieszczoną na wspólnym wale i we wspólnym korpusie. Upusty regeneracyjne pobierają parę pomiędzy stopniami turbiny. Regeneracja ciepła jest stosowana zawsze w siłowniach parowych, niezależnie od parametrów pary i wielkości (mocy) podstawowych urządzeń siłowni - turbiny i kotła.

W nowoczesnych siłowniach wyposażonych w duże kotły i turbiny przystosowanych do wysokich parametrów pary, stosuje się również tzw. wtórne przegrzewanie pary w celu polepszenia sprawności obiegu siłowni (rys. 10.8). Para częściowo rozprężona w turbinie jest napowrót skierowana do kotła, gdzie ulega powtórnemu przegrzaniu, a następnie dalej rozpręża się adiabatycznie. Na wykresie T-s jest widoczne, że pole obiegu lepiej



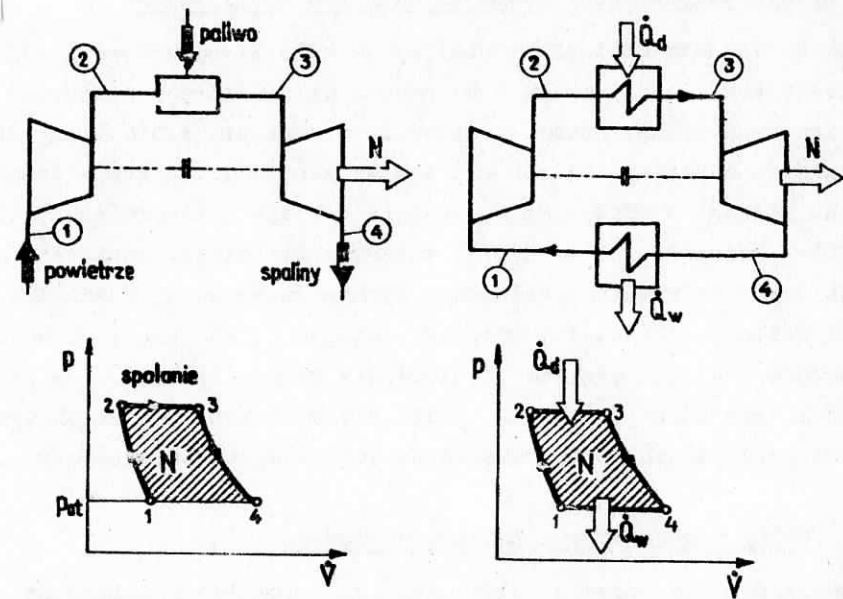
Rys. 10.8. Wtórne przegrzewanie pary w siłowni

wypełnia pole prostokąta pomiędzy ekstremalnymi temperaturami obiegu, sprawność obiegu jest więc większa (bliższa sprawności Carnota). Wtórne przegrzewanie pary sprawia także, że przy tych samych parametrach początkowych przed turbiną (stan 1) i tym samym końcowym ciśnieniu p_5 , końcowy stopień suchości pary u wylotu z turbiny jest większy, co jest korzystne dla samej turbiny, gdyż kropelki cieczy zawarte w parze mokrej powodują przy przepływie z dużymi prędkościami erozję elementów turbiny. Oczywiście jest, że obok wtórnego przegrzewania pary stosuje się równolegle regenerację ciepła.

10.3. Obieg porównawczy silnika turbogazowego

Silniki turbogazowe są używane głównie do napędu samolotów, w mniejszym stopniu do napędu pojazdów mechanicznych, statków. Silniki turbogazowe dużej mocy są niekiedy stosowane w elektrowniach mając nad siłownią parową tę przewagę, że można je uruchamiać ze stanu zimnego w ciągu kilkunastu minut, podczas gdy rozruch siłowni parowej ze stanu zimnego trwa kilka godzin. Ma to olbrzymie znaczenie dla jednostek uruchamianych na okres wieczornego szczytu energetycznego lub też na wypadek awarii innych urządzeń.

Silnik turbogazowy pobiera z otoczenia powietrze i spręża je adiabatycznie odwracalnie (w procesie teoretycznym) do wyższego ciśnienia (rysunek 10.9a). Sprężone powietrze dopływa do komory spalania, gdzie w wyniku spalania paliwa powstają spaliny o tym samym ciśnieniu, lecz o wyższej temperaturze i objętości (stan 3). Spaliny dopływają do turbiny gazowej, gdzie rozprężają się adiabatycznie odwracalnie do ciśnienia $p_4 = p_{ot}$ i są wydmuchiwane do otoczenia przekazując mu swoją nadwyżkę entalpii. W obiegu porównawczym spalanie zostało zastąpione przemianą izobaryczną 2-3, podczas której jest dostarczane ciepło Q_d z zewnętrznego źródła ciepła. Wyrzucenie gorących spalin do otoczenia i pobranie z otoczenia zimnego powietrza o tym samym ciśnieniu zostało zastąpione równoważną zamkniętą przemianą izobaryczną, podczas której czynnik obiegowy ochładza się oddając ciepło do otoczenia.



Rys. 10.9. Silnik turbogazowy (a) i jego obieg porównawczy (b)

W porównaniu z siłownią parową moc sprężania stanowi znacznie większą część mocy turbiny. Moc napędowa sprężarki jest porównywalna z mocą netto silnika.

Gdyby rozprężanie w turbinie zakończyć w momencie, w którym moc rozprężania równa się mocy sprężania, to uzyskalibyśmy spaliny o ciśnieniu wyższym od ciśnienia otoczenia. W lotniczym silniku odrzutowym spaliny te rozprężają się dalej adiabatycznie w dyszy do ciśnienia otoczenia, zwiększając kosztem pracy ekspansji swą energię kinetyczną. Wypływając w tym stanie z dyszy wytwarzają siłę ciągu.

W silnikach turbogazowych jest również stosowana regeneracja ciepła polegająca na wykorzystaniu spalin opuszczających turbinę do wstępnego podgrzania sprężanego powietrza przed komorą spalania w przepływowym wymienniku ciepła, w którym oba gazy przepływają izobarycznie wymieniając energię w postaci ciepła. Dzięki temu zwiększa się sprawność silnika.

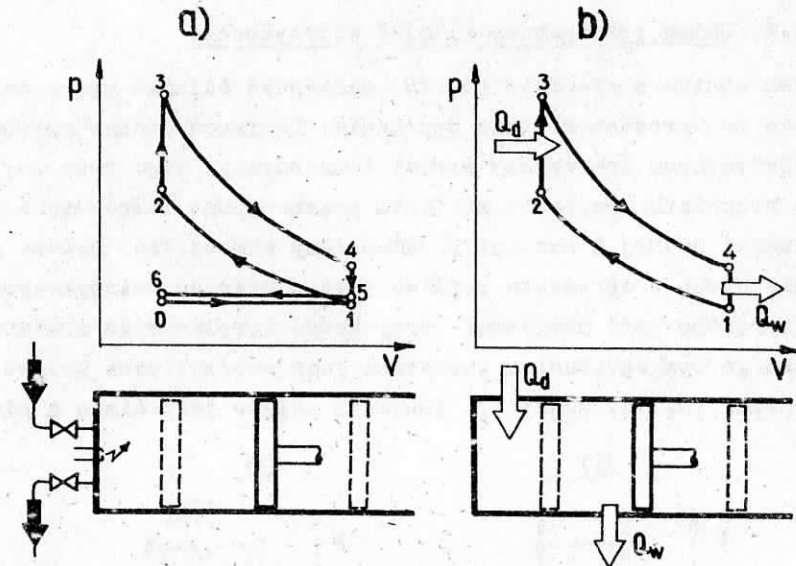
10.4. Obiegi porównawcze tłokowych silników spalinowych

Tłokowe silniki spalinowe dzielimy na silniki wybuchowe i silniki wstrzykowe. W silnikach wybuchowych do cylindra dostarczana jest mieszanka palna, która w odpowiednim momencie zostaje zapalona sztucznym zapłonem. Silnik wstrzykowy zasysa z otoczenia powietrze, do którego w odpowiednim momencie zostaje wstrzyknięte paliwo ciekłe. Podobnie jak w silniku turbogazowym ciepło dostarczane jest do czynnika wewnątrz silnika w wyniku zachodzącej w silniku reakcji spalania. Również i oddawanie ciepła do otoczenia przebiega podobnie - silnik wyrzuca do otoczenia gorące spaliny, a w to miejsce zasysa zimne powietrze. Analizy termodynamicznej tłokowych silników spalinowych można dokonać na ich obiegach porównawczych.

10.4.1. Obieg porównawczy silnika wybuchowego

W zależności od rodzaju paliwa silniki wybuchowe dzielimy na gazowe i gaźnikowe. Do silnika gazowego jest dostarczana mieszanka palna paliwa gazowego z powietrzem, silnik gaźnikowy natomiast jest zasilany paliwem ciekłym, które przedtem ulega rozpyleniu, zmieszaniu z powietrzem i częściowemu odparowaniu w tzw. gaźniku.

Na rysunku 10.10a przedstawiono wyidealizowane procesy przebiegające w silniku wybuchowym, na drugiej części rysunku natomiast silnik realizujący odpowiedni obieg porównawczy. Cykl pracy silnika wybuchowego rozpoczyna się izobarycznym napełnianiem cylindra (przemiana otwarta 0-1) mieszanką palną. Mieszanka ta zostaje następnie, przy zamkniętych zaworach, sprężona adiabatycznie (przemiana 1-2) i przy końcu tej przemiany następuje zapłon oraz spalanie. Ponieważ paliwo jest już zmieszane z powietrzem i wraz z nim podgrzane w wyniku procesu sprężania, spalanie przebiega szybko i praktycznie można przyjąć, mimo ruchu tłoka, że przebiega ono izochorycznie. W wyniku spalania mieszanki wzrasta ciśnienie w cylindrze. Następnym procesem jest adiabatyczne rozprężanie spalin 3-4 (tzw. suw pracy) i przy końcu tej przemiany otwiera się zawór wylotowy umożliwiając wypływ spalin z cylindra, aż do wyrównania się ciśnienia w cylindrze z ciśnieniem otoczenia. Przemianę tę, ozna-



Rys. 10.10. Silnik spalinowy wybuchowy

a) wyidealizowane procesy przebiegające w silniku, b) obieg porównawczy

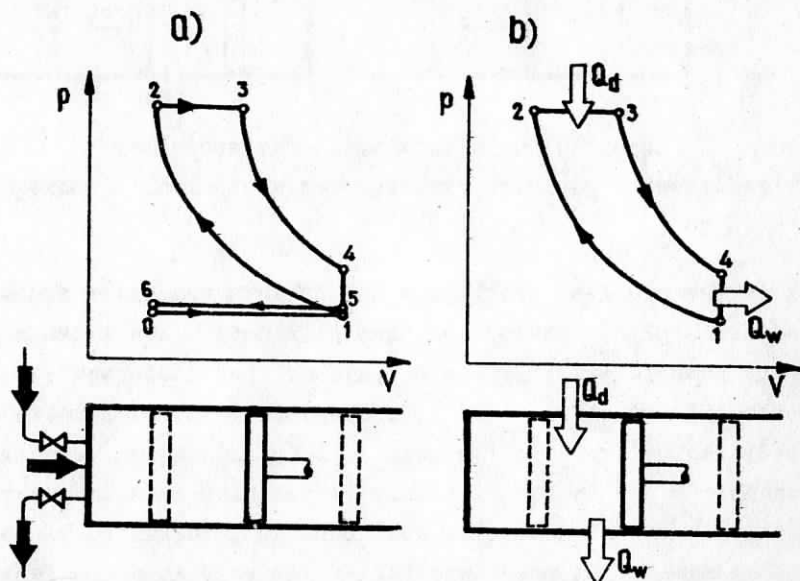
czoną na rysunku 4-5, traktujemy jak otwartą przemianę izochoryczną (szybki wypływ). Następnie, przy powrotnym ruchu tłoka i nadal otwartym zaworze wylotowym, następuje dalsze, izobaryczne opróżnianie cylindra (przemiana 5-6) kończące cykl pracy silnika. W silniku porównawczym pewna porcja gazu podlega zamkniętym przemianom fizycznym. Po sprężeniu adiabatycznym 1-2 następuje izochoryczne podgrzewanie gazu 2-3 ciepłem dostarczonym z zewnątrz, aż do uzyskania ciśnienia i temperatury takiej jak przy końcu spalania w silniku wybuchowym. Dalsza przemiana jest analogicznie jak w silniku rozprężaniem adiabatycznym, natomiast izochoryczne wyładowanie cylindra, związane z wypływem do otoczenia spalin wynoszących pewną nadwyżkę entalpii, zostało zastąpione zamkniętą przemianą izochoryczną 4-1, podczas której odpływa do otoczenia równoważna ilość ciepła. Jeżeli czynnikiem obiegowym w obiegu porównawczym jest gaz doskonały, to sprawność obiegu wyraża wzór

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}, \quad (10.18)$$

gdzie $\varepsilon = V_1/V_2$ jest tzw. stopniem sprężania.

10.4.2. Obieg porównawczy silnika wstrzykowego

Jak wynika z równania (10.18) sprawność silnika wybuchowego rośnie ze wzrostem stopnia sprężania. Ponieważ jednak sprężaniu adiabatycznemu towarzyszy wzrost temperatury, więc przy zbyt wysokich stopniach sprężania zostanie przekroczona temperatura zapłonu mieszanki palnej i wystąpi przedwczesny samozapłon. Dalsze zwiększanie stopnia sprężania możliwe jest w silniku wstrzykowym, w którym sprężane jest powietrze. Przy końcu sprężania do dostatecznie ogrzanego tym sprężeniem powietrza jest wstrzykiwane paliwo ciekłe (rys. 10.11a, punkt 2). Ponieważ paliwo jest zimne i nie zmie-



Rys. 10.11. Silnik spalinyowy wstrzykowy:

a) wyidealizowane procesy zachodzące w silniku, b) obieg porównawczy

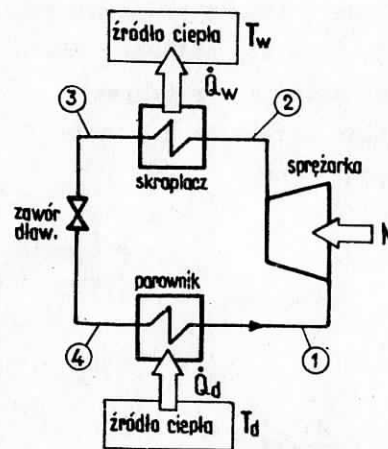
szane z powietrzem spalanie przebiega wolniej, już przy ruchu powrotnym tłoka i można je traktować jak izobaryczne^{x)}. Po zakończeniu spalania rozprężanie przebiega adiabatycznie i przy końcu

^{x)} Zależy to jeszcze od sposobu wstrzykiwania paliwa. W pewnych przypadkach lepiej jest aproksymować przemianę spalania w pierwszej części izochorą, w drugiej izobarą.

(punkt 4) otwiera się zawór wylotowy po czym podobnie jak w silniku wybuchowym, następuje izochoryczne (4-5) i izobaryczne (5-6) opróżnianie cylindra. W obiegu porównawczym (rys. 10.11b) przemiana spalania została zastąpiona izobarycznym podgrzewaniem gazu w cylindrze, a przemiana otwarta 4-1 zamkniętą przemianą izochoryczną (ochładzaniem).

10.5. Obieg parowej ziębiarki sprężarkowej

Jednym ze sposobów realizacji urządzenia do transportu ciepła w kierunku wyższej temperatury - ziębiarki lub pompy ciepła - za pomocą wkładu pracy (por. rozdz. 5.3.2) jest urządzenie realizujące lewobieżny obieg ze zmianą stanu skupienia czynnika obiegowego. Obieg ten jest odwróceniem (z pewną modyfikacją) obiegu siłowni Clausiusa-Rankine'a. Miejsce turbiny zajmuje sprężarka



Rys. 10.12. Schemat obiegu parowej ziębiarki sprężarkowej

zajmuje sprężarka (rys. 10.12), w której para nasycona sucha zostaje adiabatycznie sprężona (przemiana 1-2) do ciśnienia, dla którego temperatura nasycenia jest równa (w przypadku teoretycznym) lub nieco wyższa (w rzeczywistym urządzeniu) od temperatury górnego źródła ciepła T_w. Praca sprężania

$$N_k = \dot{m}(i_2 - i_1), \quad (10.19)$$

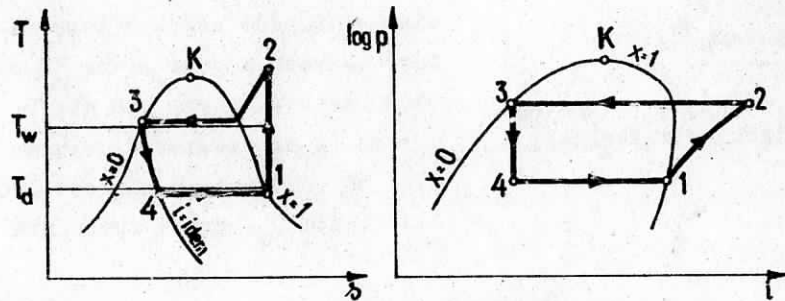
gdzie \dot{m} jest natężeniem przepływu czynnika obiegowego.

Sprężona para przepływa do skraplacza, gdzie po oddaniu ciepła przegrzania skrapla się izobarycznie (przemiana 2-3) oddając ciepło

$$\dot{Q}_w = \dot{m}(i_2 - i_3). \quad (10.20)$$

Ciecz o temperaturze nasycenia opuszczająca skraplacz powinna być, przy dokładnym odwróceniu obiegu siłowni, po ochłodzeniu, rozprężona do niższego ciśnienia. Ochłodzenia cieczy nie możemy stosować, gdyż czynnik musiałby oddawać ciepło do źródła o wyższej temperaturze (rys. 10.13a), rozprężanie natomiast jest nieopłacalne z uwagi na małą ilość uzyskanej pracy w stosunku do kosztu urządzenia rozprężającego. Ciecz o temperaturze nasycenia (punkt 3) dławimy więc izentalpowo do ciśnienia p_4 , przy którym temperatura nasycenia jest równa lub nieco niższa od temperatury dolnego źródła ciepła T_d . Uzyskana w punkcie 4 para zostaje skierowana do parowacza, gdzie przebiega izobarycznie parowanie 4-1 przy pobieraniu z dolnego źródła strumienia ciepła

$$\dot{Q}_d = \dot{m}(i_1 - i_4). \quad (10.21)$$



Rys. 10.13. Obieg parowej ziębiarki sprężarkowej:
a) wykres T s, b) wykres log p-i

Parowacz opuszcza para nasyciona sucha. Po wstawieniu równań (10.19) -(10.21) do równań (5.45) i (5.46) otrzymujemy sprawność obiegu:

dla ziębiarki

$$\varepsilon_z = \frac{i_1 - i_4}{i_2 - i_1} \quad (10.22)$$

i dla pompy ciepła

$$\varepsilon_{pc} = \frac{i_2 - i_3}{i_2 - i_1} \quad (10.23)$$

Przykładem urządzenia realizującego opisany obieg jest lodówka sprężarkowa. Sprężarka wraz z elektrycznym silnikiem napędowym stanowi tzw. agregat. Skraplacz jest wymiennikiem ciepła (ożebrowana rura) umieszczonym najczęściej na tylnej ścianie lodówki. Dławienie cieczy odbywa się w rurze kapilarnej łączącej skraplacz z parowaczem. Parowacz jest umieszczony wewnątrz lodówki i popularnie jest zwany zamrażalnikiem. W kanałach ukształtowanych w ściankach zamrażalnika przepływa i wrze czynnik ziębniczy pobierając przy tym ciepło.

Czynnik obiegowy winien być tak dobrany, by temperatury źródeł ciepła leżały w zakresie temperatur parowania (tzn. pomiędzy temperaturą punktu potrójnego i punktu krytycznego). Ponadto w temperaturach dolnego i górnego źródła ciepła winien on mieć umiarkowane ciśnienia nasycenia (niezbyt wysokie, ale też niezbyt niskie). Jeżeli brak jest pełnych danych o krzywej nasycenia, do przybliżonej oceny przydatności czynnika do obiegu, oprócz parametrów krytycznych, może służyć tzw. normalna temperatura wrzenia, będąca temperaturą nasycenia dla ciśnienia normalnego ($p_n = 1 \text{ bar}$, $p_n = 1 \text{ atm}$).

Zestawienie najczęściej stosowanych czynników ziębniczych podano w tabelicy 9. We wkladce do skryptu znajduje się wykres log p-i dla najczęściej używanego czynnika ziębniczego - freonu 12 (R 12).

R o z d z i a ł 11

SPALANIE

11.1. Paliwa

Paliwami nazywamy związki chemiczne pierwiastków: węgiel, wodór, siarka lub mieszaniny tych związków podlegające egzotermicznym reakcjom utleniania. Ta ostatnia właściwość sprawia, że są one źródłami energii cieplnej. Utlenianie paliw, zwane spalaniem przebiega zwykle przy wykorzystaniu tlenu zawartego w powietrzu, ale nie są wykluczone przypadki, w których stosuje się inne utleniacze (np. w silnikach rakietowych).

Olbrzymia większość stosowanych paliw to paliwa pochodzenia naturalnego lub produkty ich przeróbki. Paliwa naturalne to: węgiel kamienny, węgiel brunatny, ropa naftowa, gaz ziemny. Przykładami paliw będących produktami przeróbki paliw naturalnych są: koks, benzyna, gaz świetlny, gaz wodny.

11.2. Skład paliwa11.2.1. Paliwa gazowe

Skład paliwa gazowego określamy podając udziały objętościowe (molowe) poszczególnych składników. Przyjęte jest oznaczenie tych udziałów wprost symbolami chemicznymi poszczególnych gazów będących składnikami paliwa gazowego, np.

$$H_2 \equiv r_{H_2},$$

$$CO \equiv r_{CO}.$$

Inne typowe składniki paliw gazowych to: metan CH_4 , etan C_2H_6 , etylen C_2H_4 , acetylen C_2H_2 . Ponadto paliwo gazowe może zawierać tlen O_2 a także gazy niepalne, stanowiące balast: azot N_2 , dwutlenek węgla CO_2 , jak również parę wodną H_2O , przy czym zwykle udziały objętościowe dotyczą gazu suchego, a zawartość pary wodnej jest określona za pomocą stopnia zawilżenia.

Dla sporządzenia bilansu masowego reakcji spalania wygodnie jest operować zawartością poszczególnych pierwiastków w jednostce masy (1 kilomolu) suchego gazu palnego (s.g.p.).

$$n'_C = CO + CH_4 + 2 C_2H_6 + 2 C_2H_4 + 2 C_2H_2 + CO_2 \text{ kmol C/kmol s.g.p.}, \quad (11.1)$$

$$n'_{H_2} = H_2 + 2 CH_4 + 3 C_2H_6 + 2 C_2H_4 + C_2H_2 \text{ kmol } H_2/\text{kmol s.g.p.}, \quad (11.2)$$

$$n'_{O_2} = \frac{1}{2} CO + CO_2 + O_2 \text{ kmol } O_2/\text{kmol s.g.p.} \quad (11.3)$$

$$n'_{N_2} = N_2 \text{ kmol } N_2/\text{kmol s.g.p.}, \quad (11.4)$$

ujmując oddzielnie parę wodną

$$n'_{H_2O} = \frac{M_P}{M_G} X' \text{ kmol } H_2O/\text{kmol s.g.p.}, \quad (11.5)$$

gdzie X' jest stopniem zawilżenia paliwa gazowego. Użyty wyżej górny indeks ()' oznacza wielkości dotyczące substancji doprowadzanych do reakcji spalania, zwanych substratami. Wielkości dotyczące produktów spalania będą oznaczane górnym indeksem ()''.

11.2.2. Paliwa stałe i ciekłe

Paliwa stałe i ciekłe pochodzenia naturalnego są zwykle mieszaninami wielu skomplikowanych związków chemicznych. Z tego względu składu ich nie określa się za pomocą udziałów tych związków, lecz wprost za pomocą udziałów poszczególnych pierwiastków. Wyjątek

stanowi jedynie woda zawarta w paliwie i związki niepalne pozostające po reakcji spalania w postaci popiołu. Jako udziałów używa się udziałów wagowych oznaczając je małymi literami alfabetu łacińskiego: c - węgiel, h - wodór, s - siarka, o - tlen, n - azot, w - woda, p - popiół, przy czym

$$c + h + s + o + n + w + p = 1.$$

Przyjmując zaokrąglone wartości mas drobinowych otrzymujemy następujące równania do obliczania składu kilomolowego jednostki masy (1 kg) paliwa wilgotnego:

$$n'_C = \frac{c}{12} \text{ kmol C/kg p.} \quad (11.6)$$

$$n'_{H_2} = \frac{h}{2} \text{ kmol H}_2/\text{kg p.} \quad (11.7)$$

$$n'_S = \frac{s}{32} \text{ kmol S/kg p.} \quad (11.8)$$

$$n'_{O_2} = \frac{o}{32} \text{ kmol O}_2/\text{kg p.} \quad (11.9)$$

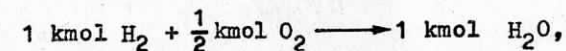
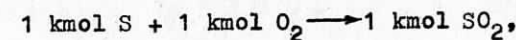
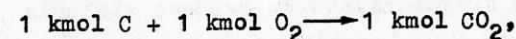
$$n'_{N_2} = \frac{n}{28} \text{ kmol N}_2/\text{kg p.} \quad (11.10)$$

$$n'_{H_2O} = \frac{w}{18} \text{ kmol H}_2O/\text{kg p.} \quad (11.11)$$

11.3. Minimalne zapotrzebowanie tlenu i powietrza

Jeżeli jednostkowa ilość paliwa (skrót "j.il.p.") ulegnie spalaniu całkowitemu i zupełnemu, to ilość kilomoli tlenu, która weszła w reakcję spalania, nazywamy minimalnym zapotrzebowaniem tlenu, a niosącą tę ilość tlenu masę (w kilomolach) powietrza - minimalnym zapotrzebowaniem powietrza. Spalanie jest c a ł k o w i t e, jeżeli cała masa paliwa wzięła udział w reakcji spalania, natomiast jest z u p e ł n e wtedy, gdy nie powstały produkty częściowego utlenienia (CO przy spalaniu pierwiastka węgla).

Opierając się na proporcjach wynikających z równań stechiometrycznych utleniania pierwiastków palnych



otrzymujemy dla minimalnego zapotrzebowania tlenu następujące równanie

$$n_{O_2 \text{ min}} = n'_C + n'_S + \frac{1}{2} n'_{H_2} - n'_{O_2} \text{ kmol O}_2/\text{j.il.p.} \quad (11.15)$$

dotyczące dowolnego paliwa. Dla paliw stałych

$$n_{O_2 \text{ min}} = \frac{c}{12} + \frac{s}{32} + \frac{h}{4} - \frac{o}{32} \text{ kmol O}_2/\text{kg p.} \quad (11.16)$$

Pierwsze trzy składniki prawej strony równań (11.15) i (11.16) oznaczają minimalne zapotrzebowanie tlenu do spalania pierwiastków palnych zawartych w jednostce ilości paliwa, ostatni składnik (ujemny) oznacza ilość tlenu, która już jest zawarta w paliwie.

Z minimalnego zapotrzebowania tlenu można przejść na minimalne zapotrzebowanie powietrza $n_{a \text{ min}}$ za pomocą równania

$$n_{a \text{ min}} = \frac{n_{O_2 \text{ min}}}{0,21}, \quad (11.17)$$

gdzie 0,21 jest udziałem objętościowym tlenu w powietrzu. Standardowe powietrze, jakim operuje się w obliczeniach stechiometrycz-

nych procesów spalania, zawiera oprócz tlenu tylko azot. W przypadku stosowania utleniacza innego niż powietrze, minimalne jego zapotrzebowanie oblicza się z takiego samego równania, przy czym 0,21 jest zastąpione aktualnym udziałem objętościowym tlenu w utleniaczu.

Ilość powietrza dostarczanego do procesu spalania n'_a musi być większa od minimalnego zapotrzebowania, na skutek niedoskonałości mieszania paliwa i powietrza. Stosunek ilości powietrza rzeczywiście dostarczonego do procesu spalania do minimalnego zapotrzebowania nazywamy **stosunkiem nadmiaru powietrza**.

$$\lambda = \frac{n'_a}{n_{a \text{ min}}} \quad (11.18)$$

Im większy stosunek nadmiaru powietrza, tym spalanie jest w większym stopniu całkowite i zupełne, tym mniejsze straty energii spowodowane obecnością w produktach reakcji spalania substancji palnych. W kotle parowym stratę energii z tego tytułu nazywamy stratą wylotową utajoną. Spaliny opuszczające kocioł nigdy nie są schładzane do temperatury otoczenia. Wynikająca stąd fizyczna nadwyżka entalpii stanowi tzw. stratę wylotową jawną. Strata ta wzrasta ze wzrostem stosunku nadmiaru powietrza - nadmiarowe powietrze ogrzewa się w komorze spalania i wynosi ze sobą energię. Istnieje zatem optymalny stosunek nadmiaru powietrza λ_{opt} , przy którym suma strat wylotowych - utajonej i jawnej - osiąga minimum. Optimum stosunku nadmiaru powietrza zależy od rodzaju paliwa i konstrukcji paleniska. Dla kotłów parowych λ_{opt} mieści się w następujących zakresach:

- paliwo stałe (węgiel), ruszt z obsługą ręczną	1,6 - 2
- paliwo stałe, ruszt mechaniczny	1,3 - 1,6
- pył węglowy i paliwo ciekłe, palnik	1,2 - 1,4
- paliwo gazowe, palnik	1,05 - 1,2.

Ponieważ strata wylotowa jest najpoważniejszą pozycją na liście strat w bilansie energetycznym kotła, stosunek nadmiaru powietrza jest jednym z podstawowych parametrów decydujących o ekonomicznej eksploatacji kotła. Kontrola tej wielkości nie odbywa się bezpośrednio, gdyż nie jest to możliwe, ale pośrednio, przez kontrolę składu spalin.

11.4. Skład spalin

W wyniku całkowitego i zupełnego spalania paliwa otrzymujemy następujące produkty:

- dwutlenek węgla powstały ze spalania węgla. Jak wynika z reakcji spalania (równanie (11.12)) z 1 kilomola węgla powstaje 1 kmol CO_2 , a więc z jednostki ilości paliwa (j.il.p.) powstaje

$$n''_{CO_2} = n'_C \text{ kmol } CO_2 / \text{j.il.p.}, \quad (11.19)$$

- dwutlenek siarki powstały ze spalania siarki zawartej w paliwie. Na podstawie analogicznego rozumowania

$$n''_{SO_2} = n'_S \text{ kmol } SO_2 / \text{j.il.p.}, \quad (11.20)$$

- azot pochodzący z paliwa (n'_{N_2}) i z powietrza ($0,79 n'_a$). Jego ilość wyraża zatem równanie

$$n''_{N_2} = n'_{N_2} + 0,79 n'_a,$$

a po uwzględnieniu zależności (11.17) i (11.18)

$$n''_{N_2} = n'_{N_2} + \frac{0,79}{0,21} \lambda n_{O \text{ min}} \text{ kmol } N_2 / \text{j.il.p.}, \quad (11.21)$$

- tlen, będący tlenem nadmiarowym, w ilości

$$n''_{O_2} = n'_O - n_{O \text{ min}} = (\lambda - 1)n_{O \text{ min}} \text{ kmol } O_2 / \text{j.il.p.}, \quad (11.22)$$

- wodę pochodzącą ze spalania wodoru zawartego w palnej masie paliwa (n'_{H_2}) oraz z wilgoci paliwa (n'_{H_2O})

$$n''_{H_2O} = n'_{H_2} + n'_{H_2O} \text{ kmol } H_2O/j.il.p. \quad (11.23)$$

W równaniu (11.23) pominięto wilgoć zawartą w powietrzu. Jeżeli spaliny zostaną ochłodzone do temperatury otoczenia (los taki spotyka je przy odciąganiu próbki do analizy), to prawie cała wilgoć ulega wykropleniu (X'' dla temperatury otoczenia jest bardzo małe). Spaliny nie zawierające H_2O nazywamy **spalinami suchymi**. Z jednostki ilości paliwa powstaje

$$n''_{ss} = n''_{CO_2} + n''_{SO_2} + n''_{N_2} + n''_{O_2} \text{ kmol s.s./j.il.p.} \quad (11.24)$$

Udziały objętościowe (mólowe) składników spalin suchych oznaczamy ich symbolami chemicznymi ujętymi w nawiasy prostokątne

$$[CO_2] = \frac{n''_{CO_2}}{n''_{ss}}, \quad [SO_2] = \frac{n''_{SO_2}}{n''_{ss}}, \quad (11.25)$$

$$[N_2] = \frac{n''_{N_2}}{n''_{ss}}, \quad [O_2] = \frac{n''_{O_2}}{n''_{ss}}$$

Jeżeli temperatura spalin jest wyższa od temperatury punktu rosy, to cała wilgoć n''_{H_2O} zawarta jest w spalinach w postaci pary. Spaliny takie nazywamy **spalinami wilgotnymi**. Masa tych spalin, wytworzona ze spalania jednostki ilości paliwa wynosi

$$n''_s = n''_{ss} + n''_{H_2O} = n''_{CO_2} + n''_{SO_2} + n''_{N_2} + n''_{O_2} + n''_{H_2O} \quad (11.26)$$

Udziały objętościowe składników spalin wilgotnych oznaczamy ich symbolami chemicznymi ujętymi w nawiasy okrągłe: (CO_2) , (SO_2) , (O_2) , (N_2) , (H_2O) .

Znajomość składu spalin pozwala na pośrednie określenie innych wielkości dotyczących procesu spalania tych, których bezpośredni pomiar jest trudny lub wręcz niemożliwy. Jeżeli ponadto znamy skład paliwa (kotły parowe są zwykle opalane paliwem pochodzącym z tego samego źródła, więc o mniej więcej stałym składzie) i jeżeli spalanie jest całkowite i zupełne, to wystarczy pomiar udziału jednego ze składników spalin - np. $[CO_2]$. Opierając się na przytoczonych wyżej równaniach stechiometrycznych można wówczas obliczyć stosunek nadmiaru powietrza λ , ilości powietrza n'_a i spalin n''_s przypadające na jednostkę ilości paliwa i dalej, znając natężenie dopływu paliwa \dot{m}_{pal} określić strumienie powietrza i spalin

$$\dot{m}_a = \dot{m}_{pal} n'_a \text{ kmol/s,} \quad (11.27)$$

$$\dot{m}_s = \dot{m}_{pal} n''_s \text{ kmol/s,} \quad (11.28)$$

których z powodu dużych trudności i niedokładności nie mierzy się bezpośrednio.

11.5. Bilans energetyczny procesu spalania

Sporządzając bilans energetyczny procesu spalania przy użyciu równań przytoczonych w rozdziale 4 stwierdzimy niezgodność. Niezgodność ta nie obala jednak pierwszej zasady termodynamiki i wynikających z niej równań, zmusza tylko do zweryfikowania sposobu obliczania niektórych pozycji w tych równaniach - energii wewnętrznej i entalpii. Przypomnijmy, że w bilansach nie operujemy nigdy bezwzględными wartościami tych wielkości termodynamicznych. Są to zawsze nadwyżki ponad pewien umownie przyjęty poziom odniesienia. Głębokość tego poziomu odniesienia zależy od tego, jak głęboko podczas danej przemiany jest naruszony stan energetyczny substan-

cji. Najbardziej "płytkie" są przemiany fizyczne bez przemian fazowych. Jeżeli podczas przemiany fizycznej zachodzą przemiany fazowe, to poziom odniesienia musi być tak przyjęty, by uwzględnić związane z tym zmiany stanu energetycznego. Podczas reakcji chemicznych sięgamy jeszcze głębiej do stanu energetycznego substancji. Energia wewnętrzna i entalpia muszą wówczas uwzględniać energie związane z łączeniem się lub rozpadaniem drobin i odpowiednio do tego musi być przyjęty poziom odniesienia.

Istnieją różne metody obliczania entalpii substancji uczestniczącej w reakcji chemicznej (energia wewnętrzna, jak wiemy, może być wyznaczona z funkcji Gibbsa). Metody te różnią się sposobem przyjmowania poziomu odniesienia.

W najogólniejszej metodzie, dostosowanej do bilansowania dowolnych reakcji chemicznych, jako poziom odniesienia dla entalpii związku chemicznego przyjmujemy stan pierwiastków, z których jest zbudowany dany związek chemiczny, w określonej temperaturze t_n i pod określonym ciśnieniem p_n . Parametry te, zwane parametrami normalnymi, są przyjęte umownie. Przyjmujemy, że w stanie tym entalpie pierwiastków, z których jest zbudowany związek chemiczny są równe zero. Ponieważ ilości pierwiastków, z których są zbudowane substancje wejściowe (substraty) reakcji chemicznej są równe ilościom tych samych pierwiastków zawartych w produktach reakcji, przyjęcie takie jest dopuszczalne. Ciepło, jakie należy dostarczyć do odpowiednich ilości pierwiastków o temperaturze t_n i ciśnieniu p_n , by utworzyć z nich izobarycznie jednostkę masy (1 kilogram) danego związku chemicznego o tej samej temperaturze t_n , nazywa się **ciepłem tworzenia** i oznaczamy je symbolem H_{pn} . Zależy ono od parametrów t_n i p_n , dla których zostało określone. Entalpia właściwa związku chemicznego o parametrach normalnych t_n i p_n będzie więc większa od entalpii zawartych w nim pierwiastków o ciepło tworzenia, a ponieważ entalpie te są równe zero, więc

$$i(t_n, p_n) = H_{pn}, \quad (11.29)$$

Jeżeli parametry związku chemicznego t, p są różne od normalnych, jego entalpia właściwa różni się od entalpii w warunkach normalnych (równ. (11.29)) o fizyczną nadwyżkę entalpii $\Delta i \Big|_{t_n, p_n}^{t, p}$ obliczoną zgodnie z zasadami przytoczonymi w poprzednich rozdziałach

$$i(t, p) = H_{pn} + \Delta i \Big|_{t_n, p_n}^{t, p}. \quad (11.30)$$

Obszerniejsze podręczniki termodynamiki zawierają tablice ciepła tworzenia różnych związków chemicznych.

Przy bilansowaniu procesów spalania wygodnie jest się posłużyć inną metodą obliczania entalpii substancji chemicznej. W metodzie tej przyjmujemy, że entalpie substancji niepalnych w umownie przyjętych warunkach normalnych t_n i p_n są równe zero, przy czym dla H_2O stanem odniesienia jest stan gazowy. Entalpia właściwa substancji palnej dotycząca tych samych parametrów normalnych jest równa ciepłu, jakie uzyskamy spalając izobarycznie (przy ciśnieniu p_n) całkowicie i zupełnie jednostką masy paliwa i po ochłodzeniu spalin do temperatury substratów (obie te temperatury są równe t_n). Woda zawarta jest w spalinach w postaci pary. Ciepło to nazywamy **wartością opałową** paliwa W_{dn} . Zgodnie więc z powyższym dla substancji palnej

$$i(t_n, p_n) = W_{dn}. \quad (11.31)$$

Jeżeli substancja ma parametry inne od normalnych, to podobnie jak poprzednio należy uwzględnić fizyczną nadwyżkę entalpii

$$i(t, p) = W_{dn} + \Delta i \Big|_{t_n, p_n}^{t, p}. \quad (11.32)$$

Równanie to obowiązuje również dla substancji niepalnych, tylko wówczas $W_{dn} = 0$. Dla ciekłej wody w fizycznej nadwyżce entalpii należy uwzględnić (ze znakiem minus) utajone ciepło parowania r_n

(dla temperatury t_n). Można również w sposób formalny przyjąć, że dla ciekłej wody $W_d = -r_n$ i w fizycznej nadwyżce entalpii nie uwzględniać zmiany stanu skupienia.

Jeżeli jednostkę masy paliwa o temperaturze t_n i ciśnieniu p_n spalimy izobarycznie, całkowicie i zupełnie i spaliny ochłodzimy do temperatury t_n , przy czym para wodna zawarta w spalinach ulegnie wykropleniu, to uzyskana ilość ciepła, zwana ciepłem spalania W_{gn} , będzie większa od wartości opałowej o utajone ciepło parowania tej ilości wody, która powstaje w wyniku spalania jednostki masy paliwa

$$W_{gn} = W_{dn} + 18 n''_{H_2O} r_n. \quad (11.33)$$

Dla paliw stałych i ciekłych, po uwzględnieniu równań (11.23), (11.7) i (11.11), otrzymujemy

$$W_{gn} = W_{dn} + (w + 9h) r_n. \quad (11.33a)$$

Jeżeli obliczanie entalpii oprzeć na ciepłe spalania, to uzyskamy równanie analogiczne do (11.32)

$$i(t,p) = W_{gn} + \Delta i \Big|_{t_n, p_n}^{t,p}$$

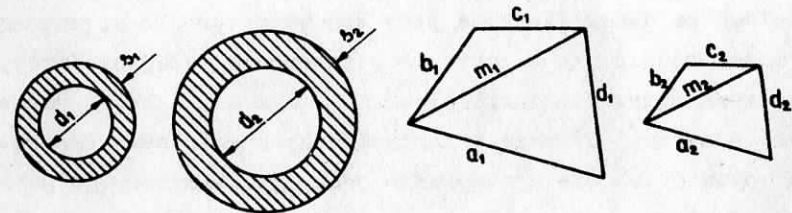
przy czym dla pary wodnej należy w fizycznej nadwyżce entalpii uwzględnić (ze znakiem plus) utajone ciepło parowania r_n lub przyjmując formalnie, że dla pary wodnej $W_{gn} = r_n$.

W dołączonych do skryptu tablicach 7 i 8 podano wartości opałowe i ciepła spalania niektórych substancji i paliw.

R o z d z i a ł 12

ELEMENTY TEORII PODOBIEŃSTWA ZJAWISK

Pierwsze i najprostsze zastosowanie znalazła teoria podobieństwa w geometrii. Jak wiemy, podobne mogą być tylko twory geometryczne tego samego rodzaju. Na przykład z figur przedstawionych na rysunku 12.1 mogą być podobne do siebie dwie pierwsze lub dwie ostatnie. Nigdy nie może być podobna figura druga do figury trzeciej. Dla jednoznacznego opisanie (zwymiarowania) tworu geometrycznego danego rodzaju jest niezbędna określona ilość jego niezależnych wymiarów liniowych. Na przykład dla opisanie czworokąta płaskiego trzeba podać 5 niezależnych wymiarów liniowych - mogą to być 4 boki i jedna z przekątnych. Warunkiem koniecznym i wystarczającym podobieństwa dwóch tworów geometrycznych tego samego rodzaju jest to, ażeby ilorazy utworzone z wymiarów liniowych jednego tworu były odpowiednio równe analogicznym ilorazom dla drugiego tworu. Ilorazy te muszą być przy tym od siebie niezależne w



Rys. 12.1. Podobieństwo geometryczne

tym sensie, że żaden z nich nie może być utworzony w wyniku mnożenia i dzielenia pozostałych. Ilorazy te można nazwać kryteriami podobieństwa. Łatwo zauważyć, że kryteriów

podobieństwa jest $n-1$, gdzie n jest ilością niezależnych wymiarów liniowych. Na przykład dla przedstawionych na rysunku 12.1 pierścieni podobieństwo uwarunkowuje jedno kryterium $K = s/d$. Warunkiem podobieństwa jest, by $K_1 = K_2$. Natomiast dla przedstawionych na tym rysunku czworokątów ilość kryteriów podobieństwa wynosi $5 - 1 = 4$ (np. $K_a = a/m$, $K_b = b/m$, $K_c = c/m$, $K_d = d/m$).

Bardzo często w praktyce operujemy zdaniami warunkowymi typu: "jeżeli x jest małe (lub duże), to wówczas spełnione jest...". Zauważmy, że warunek taki nie ma sensu, gdy x jest wymiarem geometrycznym lub jakąś inną wielkością mającą wymiar, gdyż wartość liczbową wielkości x zależy od jednostki miary i może być w zależności od niej bardzo duża lub bardzo mała. Warunek taki ma sens tylko wtedy, gdy x jest wielkością bezwymiarową typu kryterium podobieństwa.

Przedstawiony na rysunku 12.1 pierścień może być przekrojem rury. W różnych rozważaniach fizyczno-technicznych, np. przy przewodzeniu ciepła, ściankę rury traktuje się jak płaską, gdy jest ona dostatecznie cienka. O cienkości rury decyduje jednak nie grubość ścianki s , ale kryterium $K = s/d$ wyrażające stosunek grubości ścianki do średnicy.

Podobnie stwierdzenie: "jeżeli prędkość przepływu płynu w rurze jest mała, to przepływ jest laminarny" - jest niewiele mówiące, gdyż ta sama prędkość może być raz dostatecznie mała, w innych zaś okolicznościach za duża. Wiemy, że przy tej samej prędkości przepływ laminarny może pojawić się w rurze o dostatecznie małej średnicy, ale i to jeszcze wszystkiego nie wyjaśnia, gdyż w tej samej rurze (o tej samej średnicy d) przy przepływie płynu z tą samą prędkością w wystąpienie lub nie wystąpienie przepływu laminarnego zależy od lepkości płynu - ruch laminarny wystąpi dopiero powyżej pewnej wartości kinematycznego współczynnika lepkości ν . O wystąpieniu przepływu laminarnego decydują zatem te trzy wielkości jednocześnie. Zmiana jednej z nich może być skompensowana odpowiednią zmianą którejs z pozostałych. Wielkości te tworzą bezwymiarowe kryterium Reynoldsa lub liczbę Reynoldsa $Re = wd/\nu$. Wymieniony wyżej

warunek winien zatem brzmieć: "jeżeli liczba Reynoldsa jest dostatecznie mała, to przepływ jest laminarny".

Dowolne zjawisko fizyczne może być opisane za pomocą zespołu równań różniczkowych oraz towarzyszących im warunków brzegowych i początkowych. Zespół tych równań tworzy tzw. zamknięty układ równań. Zawiera on n wielkości

$$z_1, z_2, \dots, z_n,$$

do których zaliczamy:

- a) szukane funkcje, np. prędkość, ciśnienie, temperatura,
- b) współrzędne - geometryczne i czas,
- c) parametry, np. współczynnik lepkości, współczynnik przewodzenia ciepła, stałe fizyczne,
- d) wymiary geometryczne układu, w którym przebiega zjawisko fizyczne, np. średnica i długość rury.

Równania różniczkowe wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi jednoznacznie determinują związki

$$f_k(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0, \tag{12.1}$$

których jest tyle, ile szukanych funkcji.

W myśl podstawowego twierdzenia teorii podobieństwa, zwanego teorematem "pi", zależności (12.1) mogą być sprowadzone do związków

$$F_k(K_1, K_2, \dots, K_{n-m}) = 0 \tag{12.2}$$

między wielkościami bezwymiarowymi utworzonymi z wielkości pierwotnych w postaci iloczynów

$$K_1 = \prod_{j=1}^n z_j^{\alpha_{1j}}, \tag{12.3}$$

przy czym wykładniki potęgowe są liczbami całkowitymi lub zerem. Ilość zmiennych bezwymiarowych jest mniejsza od ilości zmiennych pierwotnych o ilość podstawowych jednostek wymiarowych (m, kg, s, deg, A), z których utworzone są wymiary wielkości pierwotnych. Poszczególne wielkości bezwymiarowe K_1 są od siebie niezależne w sensie liniowej niezależności ich logarytmów. Przez odpowiednią zamianę zmiennych z jednego zespołu wielkości bezwymiarowych można utworzyć inny. Na przykład zamiast kryteriów K_1 i K_2 można posługiwać się kryteriami K_1 i K_1^2/K_2 .

Postać bezwymiarową można oczywiście nadać już układowi równań różniczkowych i warunków brzegowych i jest to najdogodniejsza i najpewniejsza droga do uzyskania tych zmiennych bezwymiarowych. Jedynie w przypadku, gdy nie znamy równań różniczkowych a jedynie wielkości z_j opisujące zjawisko, konieczne jest posłużenie się inną metodą opartą wyłącznie na analizie wymiarów wielkości z_j .

Zmienne bezwymiarowe są zarazem kryteriami podobieństwa zjawisk fizycznych. W a r u n k i p o d o b i e ń s t w a dwóch zjawisk są następujące:

1. Muszą to być zjawiska tego samego rodzaju, np. dwa przepływy płynu.
2. Muszą przebiegać w układach geometrycznie podobnych.
3. Zmienne bezwymiarowe (kryteria podobieństwa) opisujące oba te zjawiska muszą się sobie odpowiednio równać

$$K_i^{(1)} = K_i^{(2)} \quad i = 1, 2, \dots, n-m.$$

Nie muszą natomiast być równe zmienne pierwotne z_j (równość ich oznaczałaby identyczność zjawisk).

Jeżeli w układach geometrycznie podobnych zachodzą zjawiska fizycznie różne, ale opisane takimi samymi równaniami różniczkowymi, to mówimy wówczas o a n a l o g i i.

Korzyści płynące ze stosowania teorii podobieństwa są następujące:

1. Zmniejszenie ilości zmiennych opisujących zjawisko. Ma to szczególne doniosłe znaczenie przy doświadczalnym określaniu związków pomiędzy zmiennymi opisującymi zjawisko, gdyż pozwala znacznie ograniczyć ilość pomiarów, ponadto umożliwia wykonywanie pomiarów bez uzmienniania niektórych, niewygodnych zmiennych. Również przy analitycznym wyznaczaniu zależności pomiędzy zmiennymi zmniejszenie ich ilości jest dużym ułatwieniem, szczególnie wtedy, gdy z powodu skomplikowanej postaci wynikowej funkcji chcemy ją przedstawić w postaci dogodnego dla praktycznego użycia wykresu.
2. Możliwe jest doświadczalne badanie zależności pomiędzy zmiennymi opisującymi zjawisko na modelach, w których zmieniono nie tylko wymiary geometryczne, ale również zakresy zmian wielkości fizycznych (można np. wykonywać badania przy niższych temperaturach).
3. Wprowadzenie zmiennych bezwymiarowych uwalnia od wielu kłopotów związanych z jednostkami. W rozważaniach analitycznych problem jednostek znika zupełnie po sprowadzeniu wyjściowych równań różniczkowych i warunków brzegowych do postaci bezwymiarowej. Przy badaniach doświadczalnych badacz musi jedynie dbać o to, by zmierzone wartości zmiennych pierwotnych wyrazić w jednostkach tego samego układu jednostek. Uzyskana przez niego zależność pomiędzy zmiennymi bezwymiarowymi może być natychmiast wykorzystana przez użytkownika operującego dowolnym innym układem jednostek. Wiemy jak trudno jest operować wzorami empirycznymi, w których nie użyto zmiennych bezwymiarowych, gdy zachodzi potrzeba posłużenia się innym układem jednostek od tego, dla którego opracowano wzór.

Jako przykład zastosowania teorii podobieństwa rozpatrzmy problem doświadczalnego wyznaczania spadku ciśnienia Δp przy przepływie płynu w rurociągu. Spadek ten zależy od następujących wiel-

kości: prędkości przepływu w , długości rurociągu l i jego średnicy d , lepkości ν i gęstości ρ płynu

$$\Delta p = \varphi(w, l, d, \nu, \rho), \quad (a)$$

lub bez wyróżniania żadnej ze zmiennych

$$f(\Delta p, w, l, d, \nu, \rho) = 0. \quad (b)$$

W naszym przypadku ilość zmiennych pierwotnych wynosi $n=6$, ilość podstawowych jednostek wymiarowych $m=3$ (wymiary zmiennych wyszczególnionych w równaniu (b) są w układzie SI następujące: $\text{kg}/(\text{m s}^2)$, m/s , m , m^2/s , kg/m^3). Ilość zmiennych bezwymiarowych wynosi zatem $n-m=3$. Mogą to być następujące zmienne:

liczba Eulera

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho w^2}, \quad (c)$$

liczby Reynoldsa

$$Re = \frac{w d}{\nu}, \quad (d)$$

zredukowana długość rury (kryterium podobieństwa geometrycznego)

$$K = \frac{l}{d}. \quad (e)$$

Zależność (b) sprowadza się zatem do związku

$$F(Eu, Re, K) = 0, \quad (f)$$

a zależność (a) do postaci

$$Eu = \phi(Re, K). \quad (g)$$

Gdyby nie korzystać z teorii podobieństwa, trzeba by dla wyznaczenia doświadczalnego funkcji (a) zmieniać 5 wielkości: wykonywać po-

miary na rurach o różnych średnicach i długościach, przy różnych prędkościach przepływu, a dla zmiany lepkości i gęstości płynu trzeba by zmieniać rodzaj płynu. Użycie teorii podobieństwa zmniejsza ilość zmiennych niezależnych do dwóch. Dla wywołania zmiany wielkości bezwymiarowych (d) i (e) wystarczy zmieniać dwie zmienne pierwotne - najwygodniej prędkość przepływu i długość rury. Badania mogą być wykonane na rurze o jednej średnicy i przy pomocy jednego płynu, bez naruszenia ogólności uzyskanych wyników.

R o z d z i a ł 13

PODSTAWOWE RÓWNANIA PRZEPŁYWU GAZÓW

13.1. Wprowadzenie

Przepływem płynów (tzn. cieczy i gazów) zajmuje się w pierwszym rzędzie mechanika. W przypadku cieczy można zaniedbać zmiany stanu związane z przepływem i opisywać przepływ wyłącznie za pomocą praw mechaniki. Przy przepływie gazów zmiany stanu termicznego i kalorycznego przepływającego gazu są zwykle nieodłączną częścią zjawiska i opis przepływu wymaga równoczesnego użycia praw mechaniki i termodynamiki.

Przepływ płynu można uważać za opisany, jeżeli znane są równania podające rozkłady prędkości i niezbędnych parametrów termodynamicznych: ciśnienia, temperatury, objętości właściwej, entalpii itp. W przypadku przepływu nieustalonego wszystkie te wielkości zależą od współrzędnych geometrycznych x,y,z od czasu τ

$$\vec{w} = \vec{w}(x,y,z,\tau),$$

$$p = p(x,y,z,\tau),$$

$$T = T(x,y,z,\tau),$$

.....

natomiast dla przepływu ustalonego wielkości te zależą tylko od współrzędnych (nie zależą od czasu)

$$\vec{w} = \vec{w}(x,y,z),$$

$$p = p(x,y,z),$$

$$T = T(x,y,z),$$

.....

Równania powyższe określają wartości interesujących wielkości w nieruchomym względem poruszającego się płynu punkcie o współrzędnych x,y,z. Oznaczmy umownie interesującą nas wielkość przez u, przy czym może to być zarówno wielkość skalarowa (np. ciśnienie p), jak i wektorowa (np. prędkość \vec{w}). W przypadku przepływu nieustalonego pochodna $\partial u/\partial \tau$ wyraża zmianę w czasie wielkości u, w rozpatrywanym punkcie przestrzeni, w którym w każdej chwili znajduje się inna porcja płynu.

Można również rozpatrywać zjawisko przepływu z punktu widzenia tej samej małej porcji płynu i śledzić jej los przy przemieszczaniu się od punktu do punktu. Położenie tej porcji płynu jest określone przez podanie czasu, gdyż współrzędne jej chwilowego (zmiennego) położenia są funkcjami czasu

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad z = z(\tau).$$

Zmianę w czasie wielkości u dotyczącej tej samej porcji płynu określa tzw. pochodna substancjalna określana równaniem

$$\frac{Du}{D\tau} = \frac{du(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau))}{d\tau}, \quad (13.1)$$

a po wykonaniu różniczkowania

$$\frac{Du}{D\tau} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{d\tau}. \quad (13.2)$$

Pochodne współrzędnych względem czasu są składowymi wektora prędkości przepływu \vec{w}

$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}, \quad (13.3)$$

a operatory różniczkowe $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ składowymi operatora wektorowego Hamiltona (operator nabra)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (13.4)$$

Tworząc po prawej stronie równania (13.2) operator

$$\frac{\partial}{\partial x} w_x + \frac{\partial}{\partial y} w_y + \frac{\partial}{\partial z} w_z = (\vec{w} \nabla) \quad (13.5)$$

zauważymy, że jest on iloczynem skalarowym operatora ∇ i wektora prędkości \vec{w} . A więc ostatecznie pochodną substancjalną możemy zapisać równaniem

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{w} \nabla)u \quad (13.6)$$

słusznym zarówno dla skalarowych, jak i wektorowych wielkości u .

Pochodna substancjalna nie znika w przypadku przepływu ustalonego. Dla tego przepływu jedynie $\partial u / \partial t = 0$, pozostaje natomiast drugi człon $(\vec{w} \nabla)u$, zwany członem konwekcyjnym i wyrażający zmianę wielkości u związaną z przemieszczeniem się rozpatrywanej cząstki płynu w czasie $d\tau$. Fizykalnie oznacza to, że ta sama porcja płynu podlega zjawisku nieustalonymu nawet wtedy, gdy dla zewnętrznego obserwatora jest ono ustalone. Podczas przepływu przy przemieszczaniu się od punktu do punktu parametry tej cząstki płynu zmieniają się.

Przepływ płynu jest zwykle co najmniej dwuwymiarowy, tzn. parametry płynu, a głównie jego prędkość zależą co najmniej od dwóch współrzędnych geometrycznych - np. przy osiowo-symetrycznym przepływie w rurze od położenia wzdłuż osi rury i od odległości od osi. Jednakże w wielu zagadnieniach przepływu przez kanały (jednym z nich jest rurociąg) wygodnie i celowo jest traktować przepływ jako jednowymiarowy, wyrażając wszystkie wielkości w funkcji współrzędnej mierzonej wzdłuż osi kanału. Wielkości te będą więc wielkościami średnimi w danym przekroju kanału. Jeżeli np. wielkość $u(\tau, x, y, z)$ uśredniamy w płaszczyźnie współrzędnych y, z to jej wartość średnia

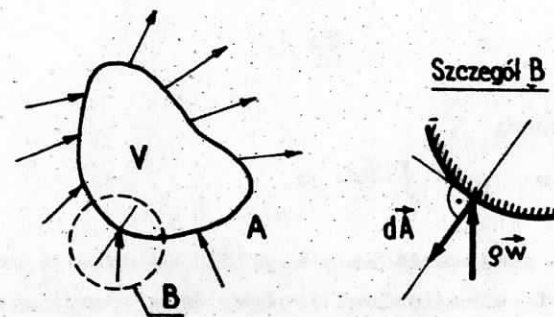
$$\bar{u}(\tau, x) = \frac{1}{A} \int_A u(\tau, x, y, z) dA, \quad (13.7)$$

gdzie A jest całkowitą powierzchnią, na której uśredniamy wielkość u (powierzchnia przekroju kanału), a dA jej elementem.

Opisując zjawisko przepływu gazu będziemy używać przedstawionych w poprzednich rozdziałach praw i równań termodynamicznych: prawa zachowania energii (I zasady termodynamiki), prawa zachowania masy, II zasady termodynamiki, termicznego i kalorycznego równania stanu. Z praw mechaniki będziemy stosować równanie ruchu.

13.2. Równanie ciągłości

Równanie ciągłości przy przepływie jest wyrazem prawa zachowania masy. W ogólnym wypadku, dla nieustalonego przepływu przez $e s t r z e n n e g o$ równanie to uzyskamy dokonując bilansu masy dla dowolnie wybranego, skończonego elementu V przestrzeni, w której odbywa się przepływ. Przez powierzchnię A elementu dopływa i wypływa strumień czynnika. Traktując wypływ jako ujemny dopływ



Rys. 13. 1. Układ do bilansu masy

możemy zajmować się tylko dopływem. Do elementarnej powierzchni $d\vec{A}$ traktowanej jak wektor o kierunku prostopadłym do powierzchni i o zwrocie na zewnątrz powierzchni, dopływa strumień masy czynnika o gęstości strumienia (wyrażonej w kg/m^2s) równej $\rho \vec{w}$. Wielkość ta jest również wektorem. Strumień masy (skalar) przepływający

przez powierzchnię $d\vec{A}$ (do wnętrza) jest iloczynem skalarowym obu tych wektorów wziętych ze znakiem minus, z uwagi na ich przeciwne zwroty

$$- \rho \vec{w} d\vec{A},$$

a całkowity dopływ przez powierzchnię A jest sumą tych elementarnych strumieni (całką) rozciągniętą na całą powierzchnię A

$$\text{dopływ} = - \oint_A \rho \vec{w} d\vec{A},$$

a po zastosowaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego

$$\text{dopływ} = - \int_V \nabla(\rho \vec{w}) dV, \quad (13.8)$$

gdzie $\nabla(\rho \vec{w}) = \text{div}(\rho \vec{w})$.

W elemencie dV przestrzeni V szybkość akumulacji masy wynosi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

a w całej objętości V

$$\text{akumulacja} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (13.9)$$

W myśl prawa zachowania masy szybkość akumulacji masy w objętości V równa się strumieniowi dopływu masy przez jej powierzchnię A . Porównując równania (13.8) i (13.9) otrzymujemy równanie

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla(\rho \vec{w}) dV,$$

a po przekształceniu

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{w}) \right) dV = 0.$$

Jeżeli powyższa całka ma być zerem dla dowolnie wybranej objętości V , to funkcja podcałkowa musi się równać zeru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{w}) = 0. \quad (13.10)$$

Uzyskane równanie jest poszukiwanym równaniem ciągłości dla dowolnego przepływu przestrzennego. Wykonując operację ∇ na iloczynie $\rho \vec{w}$ otrzymujemy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{w} \nabla \rho + \rho \nabla \vec{w} = 0, \quad (13.10a)$$

a po wprowadzeniu pochodnej substancjalnej (13.6)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{w} = 0. \quad (13.11)$$

Zastępując w równaniu ciągłości (13.10) i (13.11) gęstość ρ przez odwrotność objętości właściwej $1/v$ uzyskujemy inną postać tych równań

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v^2 \nabla \left(\frac{\vec{w}}{v} \right), \quad (13.12)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = v \nabla \vec{w}. \quad (13.13)$$

Dla przepływu ustalonego zeruje się pochodna $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ i $\frac{\partial v}{\partial t}$ i równanie ciągłości przyjmuje postać

$$\nabla(\rho \vec{w}) = 0, \quad (13.14)$$

lub

$$\nabla \left(\frac{\vec{w}}{v} \right) = 0. \quad (13.15)$$

Dla przepływu jednowymiarowego w kanale o zmiennym przekroju A równanie ciągłości uzyskamy dokonując bilansu masy dla odcinka kanału o długości dx (rys. 13.2). Akumulacja

masy w bilansowanym elemencie, będąca iloczynem jego objętości $A dx$ i zmiany gęstości $\partial \rho / \partial t$, jest równa różnicy strumienia masy dopływającego do elementu \dot{m} i strumienia masy wypływającego $\dot{m} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} dx$

$$A dx \frac{\partial \rho}{\partial t} = \dot{m} - (\dot{m} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} dx),$$

gdzie natężenie przepływu

$$\dot{m} = A w \rho. \quad (13.16)$$

Po podstawieniu i uproszczeniu

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (A \rho w)}{\partial x} = 0. \quad (13.17)$$

W kanale o stałym przekroju $A = \text{idem}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial x} = 0,$$

co jest szczególnym przypadkiem równania (13.10).

Dla przepływu ustalonego bilans masy wyraża się stwierdzeniem

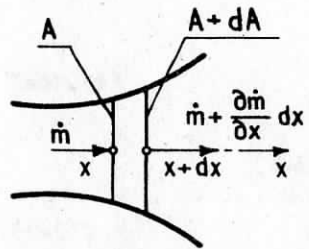
$$\dot{m} = \frac{A}{v} w = A w \rho = \text{idem}. \quad (13.18)$$

Po zlogarytmowaniu i zróżniczkowaniu powyższych równań, otrzymujemy

$$\frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} = \frac{dv}{v}, \quad (13.19)$$

lub

$$\frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} = 0. \quad (13.20)$$



Rys. 13.2. Do wyprowadzenia jednowymiarowego równania ciągłości

13.3. Równanie ruchu

13.3.1. Równanie ruchu płynu nielepkiego

Równanie ruchu uzyskujemy z warunku równości wypadkowej sił działających na poruszający się element płynu z siłą bezwładności. Przyjmujemy, że w rozpatrywanej chwili element płynu wypełnia objętość V ograniczoną powierzchnią A . W części dV tego elementu znajduje się masa $dm = \rho dV$, której przyspieszenie wynosi

$$\vec{a} = \frac{D\vec{w}}{Dt}$$

Użyliśmy tu pochodnej substancjalnej, gdyż przyspieszenie jest szybkością zmiany prędkości pewnej cząstki płynu, a nie w pewnym punkcie przestrzeni. Nawet w przypadku ruchu ustalonego poszczególne cząstki płynu mogą być przyspieszane przy przechodzeniu od punktu do punktu przestrzeni. Siła bezwładności cząstki płynu o masie dm wynosi

$$\rho dV \frac{D\vec{w}}{Dt},$$

a elementu płynu wypełniającego w danej chwili objętość V

$$\int_V \rho \frac{D\vec{w}}{Dt} dV. \quad (a)$$

W wypadku, gdy można zaniedbać siły tarcia spowodowane lepkością, a więc gdy płyn traktujemy jak nielepkiego, siła działająca na badany element poruszającego się płynu jest wypadkową jedynie sił ciśnienia i sił masowych wynikających z obecności zewnętrznego pola sił. Na część dA powierzchni ograniczającej rozpatrywany element płynu i traktowanej jako wektor $d\vec{A}$ (patrz rozdz. 13.2) działa siła - $p d\vec{A}$. Znak "-" uwzględnia fakt, że siła ta działa do powierzchni, a $d\vec{A}$ jest wektorem skierowanym na zewnątrz powierzchni. Na cały element płynu, wypełniający objętość V o powierz-

ohni A działa sumaryczna siła pochodząca od ciśnienia, wyrażająca się całką po zamkniętej powierzchni A

$$- \oint_A p \, d\vec{A},$$

którą, podobnie jak przy wyprowadzaniu równania ciągłości, można zamienić na całkę objętościową

$$- \int_V \nabla p \, dV. \tag{b}$$

W wyrażeniu powyższym $\nabla p = \text{grad } p$ jest gradientem ciśnienia.

Pole zewnętrznych sił masowych, w którym porusza się badany płyn, charakteryzujemy jego przyspieszeniem. Ponieważ najczęściej jest to pole sił grawitacyjnych, przyspieszenie oznaczymy symbolem \vec{g} . Na masę $dm = \rho dV$ działa siła $\vec{g} \rho dV$, a na całą masę wypełniającą objętość V siła wyrażająca się całką

$$\int_V \rho \vec{g} \, dV. \tag{c}$$

Porównując sumę sił działających na element płynu, przedstawionych wyrażeniami (b) i (c) z siłą bezwładności (wyrażenie (a)), uzyskujemy równanie

$$- \int_V \nabla p \, dV + \int_V \rho \vec{g} \, dV = \int_V \rho \frac{D\vec{w}}{Dt} \, dV,$$

które po przeprowadzeniu rozumowania podobnego jak przy wyprowadzaniu równania ciągłości, doprowadza nas do końcowej, użytecznej postaci równania ruchu

$$\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}. \tag{13.21}$$

Równanie to, zwane równaniem Eulera jest wektorowym równaniem różniczkowym i może być przedstawione w postaci trzech równoważnych równań skalarowych. Otrzymamy je kładąc w miejsce \vec{w} kolejno skła-

dowe w_x, w_y, w_z w miejsce ∇p (gradientu ciśnienia) składowe $\partial p / \partial x, \partial p / \partial y, \partial p / \partial z$, a w miejsce \vec{g} składowe g_x, g_y, g_z . Jeżeli przyspieszenie \vec{g} działa np. w kierunku osi x, to wówczas $g_x = g$ (wartość przyspieszenia), $g_y = g_z = 0$.

13.3.2. Równanie ruchu płynu lepkiego

Lepkością płynu nazywamy jego zdolność do przeciwstawiania się odkształceniom postaci (kształtu geometrycznego), przy czym pokonywanie związanych z tym sił wiąże się z nieodwracalną zamianą pracy na ciepło (tarcie). Podobną zdolność posiadają również sprężyste ciała stałe, jednakże w tym przypadku praca włożona na odkształcenie może być w całości lub przynajmniej w części odzyskana. Siły przeciwstawiające się odkształceniu postaci są siłami stycznymi, a odpowiadające im naprężenia - naprężeniami stycznymi. W wyniku odkształcenia poszczególne warstwy płynu przesuwają się po sobie, poruszając się z różnymi prędkościami. Doświadczenie pokazuje, że dla większości płynów można przyjąć, że naprężenie styczne δ jest proporcjonalne do gradientu prędkości dw/dn

$$\delta = \eta \frac{dw}{dn}. \tag{13.22}$$

Zależność powyższa jest nazywana prawem Newtona, a występujący w niej współczynnik proporcjonalności dynamicznym współczynnikiem lepkości. Płyny stosujące się do prawa Newtona są nazywane płynami newtonowskimi. W wielu zagadnieniach dynamicznych współczynnik lepkości występuje w ilorazie z gęstością płynu ρ . Iloraz ten jest nazywany kinematycznym współczynnikiem lepkości,

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \tag{13.23}$$

Jednostką dynamicznego współczynnika lepkości jest w układzie SI 1 kg/ms, a w układzie CGS 1 poise = 1 g/cm s = 0,1 kg/ms. Jed-

nostką kinematycznego współczynnika lepkości jest w układzie SI $1 \text{ m}^2/\text{s}$, a w układzie CGS 1 stokes, $1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 0,01 \text{ m}^2/\text{s}$.

Przepływ płynu lepkiego może być *laminarny* (uwarstwiony) lub *turbulentny* (burzliwy). Dwa przepływy hydrodynamicznie podobne mają jednakowy charakter (są albo jednocześnie laminarne albo jednocześnie turbulentne). Ponieważ kryterium podobieństwa hydrodynamicznego jest liczba Reynoldsa

$$Re = \frac{w l_0}{\nu}, \quad (13.24)$$

gdzie l_0 jest charakterystycznym rozmiarem liniowym układu, w którym odbywa się przepływ, więc charakter przepływu zależy od wartości liczby Reynoldsa. Poniżej pewnej wartości Re_g przepływ jest zawsze laminarny, natomiast dla $Re > Re_g$ jest turbulentny^{x)}. Ponieważ warunkiem podobieństwa zjawisk jest również podobieństwo układów geometrycznych, w których przebiega zjawisko więc graniczna liczba Reynoldsa będzie zależec również od geometrii układu. I tak dla rury kołowej przy użyciu średnicy jako wymiaru liniowego $Re_g = 2300$, dla szczeliny przy użyciu szerokości jako wymiaru liniowego wartość ta jest o połowę mniejsza.

Równanie ruchu dla przepływu laminarnego cieczy lepkiej uzyskuje się z równania Eulera (13.21) przez dodanie dodatkowego członu uwzględniającego siły lepkości. W wypadku, gdy przy przepływie płynu nie występują duże zmiany gęstości $\Delta \rho / \rho \ll 1$, człon ten jest iloczynem dynamicznego współczynnika lepkości η i laplasjanu prędkości $\nabla^2 \vec{w}$

$$\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{w} + \rho \vec{g}. \quad (13.25)$$

Jest to tzw. równanie Naviera-Stokesa. Po podzieleniu przez ρ i uwzględnieniu (13.23) możemy równanie to zapisać następująco:

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} = -\nu \nabla^2 \vec{w} + \vec{g}. \quad (13.25a)$$

^{x)} Możliwe jest sztuczne utrzymanie laminarności przepływu również dla $Re > Re_g$, ale są to stany nietrwałe.

Równanie Naviera-Stokesa jest spełnione ściśle dla płynów nieściśliwych, dla których $\Delta \rho / \rho = 0$. Przy małych zmianach gęstości $\Delta \rho / \rho \ll 1$ daje ono dobre przybliżenie. Przy dużych zmianach gęstości należy uwzględnić dodatkowy człon zawierający dodatkowy współczynnik lepkości (tzw. drugą lepkość) odpowiedzialny za nieodwracalne przeciwstawienie się płynu zmianom objętości. Brak danych liczbowych tego współczynnika, a również komplikacje matematyczne związane z dodatkowym członem sprawiają, że w praktyce często stosuje się przybliżone założenie o nieściśliwości płynu, ale tylko w równaniu ruchu, uwzględniając ściśliwość płynu w innych równaniach (np. w równaniu ciągłości).

13.4. Rozchodzenie się małych zaburzeń ciśnienia w płynie. Prędkość dźwięku.

Będziemy rozpatrywać rozprzestrzenianie się w płynie ściśliwym, pozostającym jako całość w spoczynku, małych zaburzeń ciśnienia. Celem rozważań będzie wyznaczenie prędkości rozchodzenia się tych zaburzeń. Jednym z przykładów takiego zjawiska jest rozchodzenie się dźwięku, jako podłużnej fali ciśnienia. Ponieważ płyn jako całość nie porusza się, a jedynie w niektórych jego punktach są wykonywane niewielkie jego przesunięcia, można przyjąć, że obecność zewnętrznych pól sił (np. grawitacyjnych) nie wpływa na to zjawisko. Ponadto przyjmiemy, że lepkość płynu nie wpływa na wartość prędkości, a jedynie na amplitudę fali ciśnienia, powodując jej tłumienie. W związku z tym użyjemy równania ruchu płynu nielepkiego (13.21), bez członu uwzględniającego siły masowe. Po rozpisaniu pochodnej substancjalnej mamy

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w} \nabla) \vec{w} \right) = -\nabla p.$$

Równanie ciągłości wykorzystamy w postaci (13.10a)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{w} \nabla \rho + \rho \nabla \vec{w} = 0. \quad (13.10a)$$

Ponieważ płyn jako całość jest w spoczynku, więc jego prędkość jest zerowa $\vec{w} = 0$, a niezerowe są tylko jej zmiany $\partial\vec{w}/\partial t$ i $\nabla\vec{w}$. Uwzględniając to w równaniach ruchu i ciągłości, mamy

$$\rho \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\nabla p$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \vec{w} = 0,$$

Powyższy układ równań różniczkowych zawiera trzy niewiadome funkcje: \vec{w}, p, ρ . W celu wyrugowania jednej z nich (gęstości) zauważmy, że lokalne zmiany gęstości spowodowane rozchodzeniem się zaburzenia ciśnienia są na tyle szybkie iż można je traktować jak adiabaticzne odwracalne (izentropowe). Upoważnia to do następującego przekształcenia pochodnej $\partial\rho/\partial t$ występującej w równaniu ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \frac{\partial p}{\partial t}$$

Uzyskany układ równań jest ponadto nieliniowy - gęstość jako zmienna występuje w iloczynie z pochodnymi. Ale z tych samych powodów, dla których przyjęliśmy prędkość w jako współczynnik równą zero, można przyjąć, że gęstość w całej masie płynu jest niezmienna i wynosi ρ_0 , a jedynie w niektórych miejscach występują jej zmiany bardzo małe w stosunku do jej wartości. Podobnie i pochodną $(\partial\rho/\partial p)_s$ jako współczynnik będziemy traktować jak niezmienną. Po uwzględnieniu powyższego uzyskamy zlinearyzowany układ równań

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\nabla p$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \nabla \vec{w} = 0.$$

W celu wyrugowania prędkości, działamy na pierwsze równanie obustronnie operatorem ∇ , a drugie różniczkujemy obustronnie podług czasu

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \vec{w}) = -\nabla^2 p$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \vec{w}) = 0.$$

Po obustronnym dodaniu i uproszczeniu otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \nabla^2 p.$$

Jak widać, jest to równanie różniczkowe fali nietłumionej ciśnienia

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 p, \quad (13.26)$$

której prędkość wynosi

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \quad (13.27)$$

Używając zamiast gęstości objętości właściwej $v = \frac{1}{\rho}$ otrzymamy inną postać tego wzoru

$$a = v \sqrt{-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s}. \quad (13.28)$$

Dla gazu doskonałego i półdoskonałego obowiązuje przy przemianie izentropowej równanie (6.40), z którego wynika

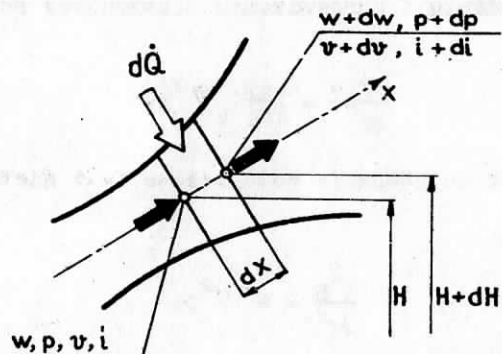
$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -\mathcal{H} \frac{p}{v}.$$

Kojarząc to z równaniem (13.28) i uwzględniając równanie stanu otrzymujemy wzór na prędkość dźwięku w gazie doskonałym lub półdoskonałym

$$a = \sqrt{\mathcal{H} RT}. \quad (13.29)$$

13.5. Jednowymiarowy, ustalony przepływ gazu w kanale o zmiennym przekroju

W kanale o zmiennym przekroju (rys. 13.3) przepływa gaz. Przepływ jest ustalony, tzn. w poszczególnych przekrojach kanału nie zmienia się prędkość i parametry termiczne oraz kaloryczne gazu.



Rys. 13.3. Przepływ gazu w kanale

Podczas przepływu gaz poprzez ściankę pobiera ciepło, którego strumień jest również stały. Prędkość i parametry gazu zmieniają się natomiast przy przechodzeniu od przekroju do przekroju kanału, w wyniku przemiany, jakiej podlega gaz w kanale. Na elementarnym odcinku kanału o długości dx pole przekroju kanału zmieniło się z A na $A + dA$, wysokość z H na $H + dH$, prędkość z w na $w + dw$, energia kinetyczna właściwa z $w^2/2$ na $w^2/2 + d(w^2/2)$, ciśnienie z p na $p+dp$ itd.

Związek pomiędzy zmianą przekroju kanału, objętości właściwej i prędkości wyraża równanie ciągłości (13.19)

$$\frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} = \frac{dv}{v} \quad (13.19)$$

Kolejną relację pomiędzy interesującymi wielkościami uzyskamy z pierwszej zasady termodynamiki, bilansując sumę strumieni energii

dostarczanych (energia strugi i strumień ciepła) i strumień energii wyprowadzanej (energia strugi)

$$\dot{m}\left(i + \frac{w^2}{2} + gH\right) + d\dot{Q} = \dot{m}\left(i + di + \frac{w^2}{2} + d\left(\frac{w^2}{2}\right) + g(H + dH)\right).$$

Strumień ciepła $d\dot{Q}$ dostarczanego na odcinku dx do strumienia masy \dot{m} można przedstawić w postaci

$$d\dot{Q} = \dot{m} dq,$$

gdzie dq jest ciepłem jednostkowym dostarczonym do czynnika na odcinku dx kanału. Po prostych przekształceniach równanie bilansu sprowadza się do postaci

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = -di + dq - g dH. \quad (13.30)$$

Energia kinetyczna gazu płynącego kanałem przyrasta więc kosztem spadku jego entalpii i energii potencjalnej oraz kosztem dostarczonego ciepła. Zmiany energii potencjalnej są dla gazu znikome małe i można je zaniedbać w prawie wszystkich zagadnieniach technicznych. Dzięki temu równanie (13.30) upraszcza się do postaci

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = -di + dq. \quad (13.31)$$

Z równania (4.64)

$$dq + dq_f = di - v dp,$$

będącego jednym z fundamentalnych równań termodynamiki, wynika związek

$$-di + dq = -v dp - dq_f,$$

który po podstawieniu do równania (13.30) daje zależność

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = -v dp - dq_f. \quad (13.32)$$

Rozpatrując w rozdziale 6 różne przemiany termodynamiczne nie uwzględnialiśmy zmiany energii kinetycznej gazu podlegającego przemianie. W związku z tym w urządzeniu przepływowym wyrażenie $(-\int \dot{V} dp - d\dot{Q}_f)$ przedstawiało strumień pracy technicznej wykonanej (moc wewnętrzną) $\dot{L}_{t1-2} = N_i$. Jeżeli w czasie przemiany gaz zwiększa swą energię kinetyczną, to o tyle jest mniejsza praca techniczna

$$\dot{L}_{t1-2} + \Delta \dot{E}_k = - \int_{p_1}^{p_2} \dot{V} dp - \dot{Q}_f,$$

energia kinetyczna jest bowiem formą energii równoważną pracy (mogącą być w całości zamieniona na pracę). Rozprężanie gazu w kanale jest przypadkiem skrajnym, przy którym na zewnątrz nie jest oddawana żadna praca

$$\dot{L}_{t1-2} = 0,$$

a cała praca rozprężania zużywa się na przyrost energii kinetycznej gazu

$$\Delta \dot{E}_k = \dot{m} \left(\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} \right) = - \int_{p_1}^{p_2} \dot{V} dp - \dot{Q}_f.$$

Zapisując powyższe równanie w postaci różniczkowej (dla odcinka kanału o długości dx) otrzymujemy związek

$$\dot{m} d\left(\frac{w^2}{2}\right) = - \dot{V} dp - d\dot{Q}_f,$$

który po podzieleniu przez strumień masy \dot{m} sprowadza się do równania (13.32).

Z drugiej zasady termodynamiki wynika, że suma przyrostów entropii źródeł masy - $\dot{m}s + \dot{m}(s + ds)$ oraz przyrostu entropii źródła ciepła - $\frac{d\dot{Q}}{T_{zc}}$ jest nieujemna

$$-\dot{m}s + \dot{m}(s + ds) - \frac{d\dot{Q}}{T_{zc}} \geq 0,$$

a po podzieleniu przez \dot{m} i uproszczeniu

$$ds \geq \frac{dq}{T_{zc}}. \quad (13.33)$$

Jeżeli ciepło jest dostarczane ($dq > 0$), to temperatura źródła ciepła nie może być niższa od temperatury gazu

$$T_{zc} \geq T$$

i dlatego zamiast (13.33) można napisać

$$T ds - dq \geq 0, \quad (13.34)$$

co jest stwierdzeniem oczywistego faktu, że ciepło tarcia $dq_f = dq_c - dq = T ds - dq$ nie może być ujemne.

Dla przepływu adiabatycznego w równaniach (13.31), (13.33) i (13.34) należy położyć

$$dq = 0, \quad (13.35)$$

otrzymując

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = - di, \quad (13.36)$$

$$ds \geq 0. \quad (13.37)$$

Z ogólnego warunku $dq + dq_f = T ds$ wynika dla przepływu adiabatycznego

$$dq_f = T ds,$$

co po uwzględnieniu w równaniu (13.32) daje

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = -v dp - T ds. \quad (13.38)$$

Dla krótkich kanałów, przez które gaz przepływa z dużą prędkością, nawet gdy kanał nie jest zaizolowany przepływ można traktować jak adiabatyczny.

Zanim przystąpimy do wyprowadzenia równań określających ilościowe zmiany parametrów konkretnego gazu w konkretnym kanale rozstrzygniemy podstawowy problem jakościowy: jak zmienia się (rośnie czy maleje) prędkość i ciśnienie gazu w zależności od tego, czy kanał się rozszerza, czy zwęża. Z równania (13.32) wynika, że rozprężaniu towarzyszy zawsze wzrost prędkości, a sprężaniu jej spadek. Wystarczy więc zajmować się tylko charakterem zmiany ciśnienia. Dla powiązania tej zmiany ze zmianą przekroju kanału wyrugujemy z równania ciągłości (13.19) zmianę prędkości dw i zmianę objętości dv , wyrażając je przez zmianę ciśnienia dp i zmianę entropii ds . Dzielimy równanie (13.38)

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = w dw = -v dp - T ds$$

przez w^2 otrzymujemy jeden z członów równania (13.19)

$$\frac{dw}{w} = -\frac{1}{2} (v dp + T ds). \quad (a)$$

Przedstawiając objętość właściwą v jako funkcję ciśnienia i entropii właściwej $v = v(p, s)$ zapiszemy następująco jej różniczkę zupełną

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s dp + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p ds. \quad (b)$$

Na mocy równania (13.28) pochodną cząstkową podług ciśnienia możemy wyrazić za pomocą prędkości dźwięku a

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = -\frac{v^2}{a^2}. \quad (c)$$

Pochodną cząstkową podług entropii właściwej możemy przekształcić następująco

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p} p.$$

Licznik powyższego ułamka można wyrazić za pomocą współczynnika, rozszerzalności objętościowej (2.15)

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \alpha v,$$

a mianownik jest współczynnikiem przy różniczce dT w różniczce zupełnej $ds(T, p)$ i na podstawie równania (5.8) wynosi

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T}.$$

Tak więc

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p = \frac{\alpha v T}{c_p}. \quad (d)$$

Podstawiając równania (c) i (d) do równania (b) otrzymujemy

$$dv = -\frac{v^2}{a^2} dp + \frac{\alpha v T}{c_p} ds,$$

a po podzieleniu przez v

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} v dp + \frac{\alpha}{c_p} T ds. \quad (e)$$

Poszukiwane równanie uzyskamy podstawiając do równania ciągłości (13.19) równania (a) i (e)

$$\frac{dA}{A} - \frac{1}{2} v dp - \frac{1}{2} T ds = -\frac{1}{2} v dp + \frac{\alpha}{c_p} T ds.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{dA}{A} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}\right)v dp + \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{c_p}\right)T ds. \quad (13.39)$$

Równanie powyższe dotyczy dowolnego przepływu adiabatycznego. Iloczyn $T ds$ jest ciepłem tarcia dq_f , a cały człon zawierający ten iloczyn uwzględnia nieodwracalność przemiany adiabatycznej w kanale.

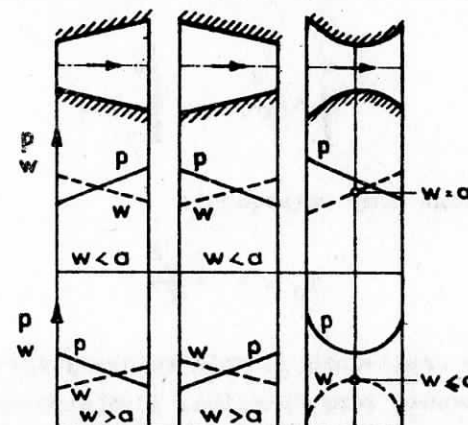
Dla przepływu adiabatycznego odwracalnego (izentropowego) $ds = 0$ i równanie (13.39) upraszcza się do postaci

$$\frac{dA}{A} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}\right)v dp. \quad (13.40)$$

Z wyprowadzonych równań (13.39) i (13.40) można uzyskać jakościową ocenę przebiegu zjawiska przemiany adiabatycznej płynu w kanale o zmiennym przekroju. Dla przepływu adiabatycznego odwracalnego jest widoczne, że dla $w < a$ (prędkość przepływu mniejsza od prędkości dźwięku) znak różniczki dA i dp jest taki sam (wyrażenie $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}\right)$ jest dodatnie), a więc w kanale rozszerzającym się, $dA > 0$, czynnik ulega sprężeniu, $dp > 0$, natomiast w kanale zwężającym się, $dA < 0$, ma miejsce rozprężanie czynnika, $dp < 0$ (rys. 13.4). Jak już wyżej stwierdziliśmy, w pierwszym przypadku prędkość maleje, w drugim rośnie. Jeżeli prędkość przepływu gazu jest większa od prędkości dźwięku, $w > a$, to wyrażenie $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}\right)$

jest ujemne i znaki różniczek dA i dp są przeciwne. A więc w kanale rozszerzającym się, $dA > 0$, wystąpi rozprężanie czynnika, $dp < 0$, natomiast w kanale zwężającym się jego sprężenie, $dp > 0$. Stawiając warunek $w > a$ lub $w < a$ nie precyzowaliśmy punktu kanału, którego on dotyczy. Łatwo bowiem zauważyć, że w kanale o monotonicznie zmieniającym się przekroju prędkość dźwięku nie może być przekroczona w jedną lub drugą stronę. Przejdzie przez wartość

$w = a$ możliwe by było dla $dA = 0$, a to oznaczałoby naruszenie monotoniczności zmiany przekroju (kanał ze zwężającego się stałby się rozszerzający lub na odwrót). Prędkość dźwięku może więc być osiągnięta przy przepływie adiabatycznym odwracalnym w przekroju minimalnym kanału. Nie zawsze jednak w przekroju minimalnym prędkość ta będzie osiągnięta - przy $dA = 0$ równanie (13.40) może być spełnione także przy $dp = 0$, a więc wtedy, gdy w przekroju minimalnym nastąpi zmiana charakteru przebiegu ciśnienia (ze sprężania na rozprężanie lub na odwrót).



Rys. 13.4. Przepływ adiabatyczny odwracalny w kanale o zmiennym przekroju

Powyższe rozważania wskazują na szczególną rolę prędkości dźwięku przy adiabatycznym przepływie gazu. Jest to prędkość krytyczna, przy której zmienia się jakościowo charakter przepływu gazu. Wiąże się z tym bezwymiarowe kryterium podobieństwa przepływu gazów, zwane liczbą Macha

$$Ma = \frac{w}{a}, \quad (13.41)$$

gdzie a jest prędkością dźwięku wyznaczoną dla parametrów panujących w miejscu, w którym obliczamy prędkość gazu w i liczbę

Macha. Przepływ, dla którego $w < a$ oraz $Ma < 1$ nazywamy przepływem poddźwiękowym, natomiast przepływ, dla którego $w > a$ oraz $Ma > 1$ nazywamy przepływem nadźwiękowym.

13.6. Parametry spoczynkowe

Parametrami spoczynkowymi strugi czynnika mającego rzeczywiste parametry T, p, v, i, s oraz prędkość w nazywamy parametry T_0, p_0, v_0, i_0, s_0 uzyskane w wyniku adiabaticznego, odwracalnego zahamowania strugi do prędkości $w_0 = 0$. Z całkowania równania bilansu (13.36) w granicach przemiany, otrzymujemy jeden z warunków wiążących parametry spoczynkowe z parametrami rzeczywistymi strugi

$$\int_w^0 d\left(\frac{w^2}{2}\right) = - \int_i^{i_0} di.$$

Po wykonaniu działań mamy ostatecznie

$$i_0 = i + \frac{w^2}{2}. \quad (13.42)$$

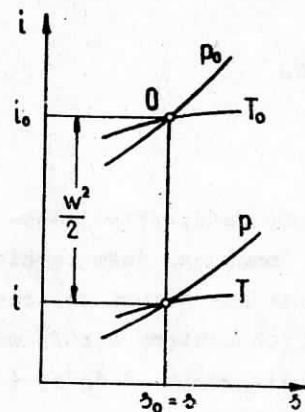
Równanie powyższe uwzględnia jedynie adiabaticzność hamowania, pod kątem pierwszej zasady termodynamiki. Adiabaticzność i odwracalność daje, na podstawie drugiej zasady termodynamiki, drugi warunek wiążący parametry spoczynkowe z parametrami rzeczywistymi

$$s_0 = s. \quad (13.43)$$

Oba warunki (13.42) i (13.43) użyte jednocześnie umożliwiają wyznaczenie dowolnej pary parametrów spoczynkowych z zespołu T_0, p_0, v_0, i_0, s_0 . Najczęściej poszukujemy spoczynkowej temperatury T_0 i spoczynkowego ciśnienia p_0 .

Przy wyznaczaniu parametrów spoczynkowych za pomocą wykresu $i-s$ należy z punktu będącego odwzorowaniem rzeczywistego stanu czynnika poprowadzić linię prostopadłą do osi s i odłożyć na niej w

górze odcinek o długości $w^2/2$ (rys. 13.5). Uzyskany punkt jest odwzorowaniem stanu spoczynkowego. Mając na wykresie punkt bez trudności odczytujemy wszystkie potrzebne parametry spoczynkowe.



Rys. 13.5. Parametry spoczynkowe

Jeżeli zachodzi potrzeba rachunkowego wyznaczenia parametrów spoczynkowych, np. T_0 i p_0 , to dysponując kalorycznymi równaniami stanu $i = i(T, p)$ oraz $s = s(T, p)$ rozwiążemy układ równań

$$i(T_0, p_0) = i + \frac{w^2}{2} \quad (13.42a)$$

$$s(T_0, p_0) = s. \quad (13.43a)$$

Dla gazu doskonałego można wykorzystać wprost jedynie równanie (13.42a), które po uwzględnieniu, że $i = c_p T$ daje

$$T_0 = T + \frac{w^2}{2 c_p}, \quad (13.44)$$

natomiast warunek izentropowości (13.43a) można zastąpić równoważnym warunkiem wiążącym parametry gazu doskonałego podczas przemiany izentropowej

$$p_0 = p \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (13.45)$$

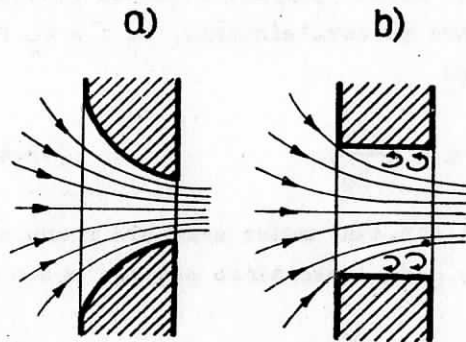
Dla gazu rzeczywistego układ równań (13.42a) i (13.43a) jest układem równań przestępnych i można go rozwiązać jedną z metod przybliżonych, np. metodą stycznych, obierając jako pierwsze przybliżenie parametry wyznaczone jak dla gazu doskonałego.

R o z d z i a ł 14

PRZEPŁYW GAZU W DYSZACH

14.1. Rodzaje dysz

Krótki kanał, w którym zachodzi rozprężanie gazu, przy jednoczesnym wzroście prędkości, nazywamy dyszą. Kanał ten jest zwykle tak wyprofilowany, by nie zachodziło odrywanie się strugi od ścian i tworzenie się martwych przestrzeni, w których występują nieodwracalne zjawiska zawirowań i intensywnego tarcia. Przykład dyszy i otworu nie będącego dyszą pokazano na rysunku 14.1.



Rys. 14.1. Dysza (a) i otwór ostrokrawędziowy (b)

Gaz dopływający do dyszy posiada niedużą prędkość, zawsze mniejszą od prędkości dźwięku. Na podstawie rozważań przeprowadzonych w rozdziale 13.5 można stwierdzić, że dysza, jeżeli ma rozprężać gaz, musi być począwszy od wlotu - zbieżna (zwążać się). Z tych samych rozważań wynika, że w dyszy zbieżnej aż do wylotu można co najwyżej osiągnąć prędkość dźwięku. Dyszę taką nazywamy dyszą Bendemanna. Głębsze rozprężenie gazu, z przekroczeniem prędkości dźwięku

Dysza zwykle nie jest zaizolowana, ale mała jej długość i duża wartość gęstości strumienia masy \dot{m}/A ($\text{kg}/\text{m}^2\text{s}$) sprawiają, że ciepło jednostkowe q_{1-2} oddane (lub pobrane) przez gaz podczas przepływu jest znacznie mniejsze od jego spadku entalpii ($i_1 - i_2$). Przemianę w dyszy możemy więc traktować jak adiabatyczną (por. rozdz. 6.4).

wymaga, by w części nadźwźwiękowej ($Ma > 1$) dysza była rozbieżna (rys. 13.4). Dyszę zbieżną w pierwszej części, a rozbieżną w drugiej nazywamy dyszą de Lavalą.

14.2. Prędkość wypływu z dyszy adiabatycznej

Jeżeli dysza jest adiabatyczna, to energia strumienia dopływającego do dyszy jest równa energii strumienia wypływającego z dyszy

$$\dot{m}(i_1 + \frac{w_1^2}{2}) = \dot{m}(i_2 + \frac{w_2^2}{2}).$$

Po zastosowaniu entalpii spoczynkowej dla parametrów początkowych otrzymujemy

$$i_0 = i_2 + \frac{w_2^2}{2},$$

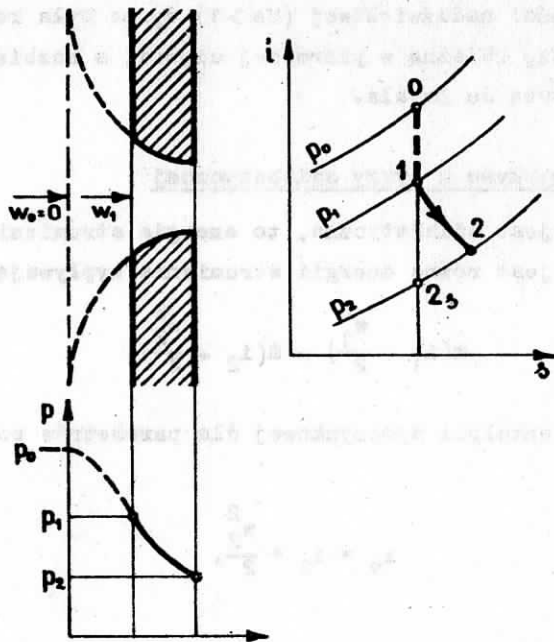
a stąd

$$w_2 = \sqrt{2(i_0 - i_2)}. \quad (14.1)$$

Zauważmy, że operowanie parametrami spoczynkowymi dla parametrów początkowych ma swoje uzasadnienie fizyczne. Można sobie wyobrazić, że rozpatrywana dysza, do której dopływa gaz o prędkości w_1 i entalpii i_1 jest odciętą końcową częścią dłuższej dyszy, do której dopływa gaz z nieskończenie małą prędkością $w_0 = 0$ i o parametrach spoczynkowych (rys. 14.2). Należy przy tym pamiętać, że niezależnie od charakteru adiabaty (odwracalna lub nie) w tej fikcyjnej wstępnej części dyszy odbywa się zawsze rozprężanie adiabatyczne odwracalne.

Dla g a z u d o s k o n a ł e g o równanie (14.1) ma postać

$$w_2 = \sqrt{2 c_p (T_0 - T_2)}. \quad (14.2)$$



Rys. 14.2. Interpretacja parametrów spoczynkowych dla przekroju początkowego dyszy adiabatycznej

Jeżeli ponadto przemiana jest odwracalna, to dalszą konkretyzację równania (14.1) uzyskamy podstawiając do równania (14.2) zależności (6.43) i (4.97)

$$T_2 = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa-1} R.$$

Po podstawieniu i przekształceniu, uzyskujemy wzór

$$w_{2s} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}. \quad (14.3)$$

Wzór powyższy można również wyprowadzić z całkowania równania (13.32), przy $dq_f = 0$ i przy podstawieniu równania adiabaty odwracalnej $p v^\kappa = p_0 v_0^\kappa$.

Z równania (14.3) jest widoczne, że prędkość wypływu gazu jest ograniczona. Gdyby rozprężanie przebiegało do $p_2 = 0$ (do próżni), to maksymalna prędkość wypływu wynosiłaby

$$w_{2s \max} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} p_0 v_0} = \sqrt{2 c_p T_0}. \quad (14.4)$$

14.3. Nieodwracalność przepływu w dyszy

Nieodwracalność przepływu adiabatycznego może być opisana za pomocą sprawności przemiany adiabatycznej, będącej stosunkiem rzeczywistego spadku entalpii $i_1 - i_2$ do spadku entalpii ($i_1 - i_{2s}$) jaki wystąpiłby w dyszy rozprężającej gaz od tych samych parametrów początkowych do tego samego końcowego ciśnienia

$$\eta_i = \frac{i_1 - i_2}{i_1 - i_{2s}}, \quad (14.5)$$

W ten sam sposób była opisana nieodwracalność przemiany adiabatycznej w maszynie przepływowej (równ. (6.36)). Spadki entalpii można zastąpić przyrostami energii kinetycznej, uzyskując inną postać wzoru

$$\eta_i = \frac{w_1^2 - w_2^2}{w_1^2 - w_{2s}^2}. \quad (14.6)$$

Dla stosowanych w technice dysz ich sprawność waha się w granicach od 85 do 97%.

Innym sposobem określenia nieodwracalności rozprężania adiabatycznego w dyszy jest tzw. stosunek prędkości będący stosunkiem rzeczywistej prędkości wypływu do prędkości wypływu w przypadku ekspansji izentropowej

$$\varphi = \frac{w_2}{w_{2s}}. \quad (14.7)$$

Jeżeli prędkość dolotowa gazu do dyszy jest bardzo mała $w_1 \approx 0$, to obowiązuje równanie

$$\eta_i = \varphi^2$$

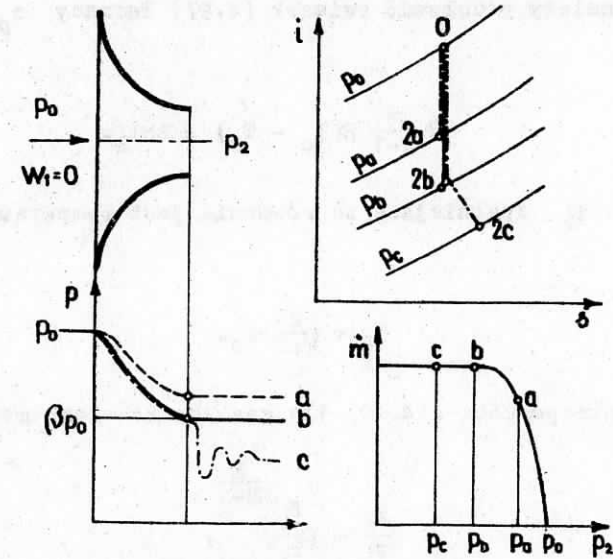
wiążące sprawność dyszy ze stosunkiem prędkości.

14.4. Dysza Bendemanna

Jak już wyżej wspomniano, dysza Bendemanna jest dyszą zbieżną. W dyszy tej gaz może się rozprężyć co najwyżej do prędkości dźwięku. Ograniczenie na prędkość wypływu pociąga za sobą ograniczenie na ciśnienie możliwe do uzyskania w przekroju wylotowym. Najniższe ciśnienie możliwe do uzyskania w przekroju minimalnym dyszy, związane z pojawieniem się w tym przekroju prędkości dźwięku, nazywamy ciśnieniem krytycznym p_k , a stosunek ciśnienia krytycznego do ciśnienia spoczynkowego przed dyszą - krytycznym stosunkiem ciśnień

$$\beta = \frac{p_k}{p_0} \quad (14.8)$$

W przypadku, gdy za dyszą panuje ciśnienie mniejsze od krytycznego $p_2 < \beta p_0$, w dyszy nastąpi rozprężenie jedynie do ciśnienia krytycznego, dalsze rozprężenie wystąpi w przestrzeni poza dyszą. Ilustruje to krzywa c przebiegu ciśnienia na rysunku 14.3. Rozprężanie gazu poza dyszą do ciśnienia niższego od minimalnego możliwego w przekroju wylotowym nazywamy wtórną ekspansją. Jest to zjawisko silnie nieodwracalne. Można się spodziewać, że w miarę spadku ciśnienia za dyszą, przy stałych parametrach przed dyszą, będzie rosła strumień masy gazu \dot{m} przepływającego przez dyszę osiągając maksymalną wartość w przypadku wystąpienia w przekroju wylotowym prędkości dźwięku, a więc już przy ciśnieniu $p_2 = \beta p_0$. Dla ciśnień $p_2 < \beta p_0$ przebieg zjawiska w samej dyszy nie zmienia się, a więc i strumień masy utrzymuje się na stałej, maksymalnej wartości (jak na wykresie, rys. 14.3).



Rys. 14.3. Różne przypadki rozprężania w dyszy Bendemanna:

- a) $p_2 > \beta p_0$, b) $p_2 = \beta p_0$, c) $p_2 < \beta p_0$

Ciśnienie krytyczne dla przepływu izentropowego można znaleźć bądź ze sformułowanego wyżej warunku wystąpienia w przekroju wylotowym prędkości dźwięku, bądź też z warunku maksimum strumienia masy. Pierwszy sposób daje zależności

$$i_0 - i_2 = \frac{1}{2} a_2^2 \quad (14.9)$$

$$s_2 = s_0 \quad (14.10)$$

Indeks 2 przy prędkości dźwięku oznacza, że jest to prędkość wyznaczona dla parametrów w przekroju 2. Dla gazu doskonałego warunek (14.9), po uwzględnieniu równań (4.86) i (13.29) sprowadza się do równania

$$2 c_p (T_0 - T_2) = \kappa R T_2$$

do którego należy podstawić związek (4.97) łączący c_p i R , otrzymując

$$2 \frac{\kappa}{\kappa-1} R(T_0 - T_2) = \kappa R T_2.$$

Temperatura T_2 spełniająca to równanie jest temperaturą krytyczną T_k

$$T_k = \frac{2}{\kappa+1} T_0. \quad (14.11)$$

Warunek izentropowości (14.10) dla gazu doskonałego można zastąpić równaniem

$$\frac{p_2}{p_0} = \left(\frac{T_2}{T_0} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}},$$

z którego dla $p_2 = p_k$ i $T_2 = T_k$ wynika

$$\beta = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (14.12)$$

Drugi sposób wyznaczenia parametrów krytycznych jest nieco dłuższy, ale jego owocem jest również ilościowa zależność strumienia masy gazu przepływającego przez dyszę od parametrów przed dyszą i ciśnienia za dyszą. Zależność ta ma duże znaczenie praktyczne. Podstawą do obliczenia strumienia masy jest równanie ciągłości (13.18), które dla przekroju 2 ma postać

$$\dot{m} = \frac{A_2 w_2}{v_2}. \quad (14.13)$$

Prędkość wypływu w_2 dla przepływu izentropowego gazu doskonałego daje równanie (14.3), a objętość właściwą po przemianie izentropowej można obliczyć z równania izentropy (6.41)

$$v_{2s} = v_0 \left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Uwzględniając powyższe w równaniu (14.13) otrzymujemy strumień masy dla przepływu izentropowego

$$\dot{m}_s = A_2 \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{v_0} \left[\left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]}.$$

W równaniu powyższym wygodnie jest wydzielić czynnik zawierający tylko dółowe parametry spoczynkowe i oddzielnie czynnik zależny od stosunku ciśnień

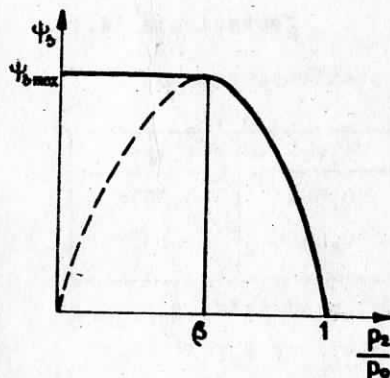
$$\dot{m}_s = A_2 \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]} \cdot \sqrt{\frac{p_0}{v_0}}.$$

Wprowadzając dla czynnika zależnego od stosunku ciśnień, zwanego liczbą przepływu oznaczenie

$$\psi_s = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]} \quad (14.14)$$

otrzymujemy ostatecznie

$$\dot{m}_s = A_2 \psi_s \sqrt{\frac{p_0}{v_0}}. \quad (14.15)$$



Rys. 14.4. Liczba przepływu w funkcji stosunku ciśnień (linia przerywana - formalne przedłużenie równania (14.14))

Zależność liczby przepływu ψ_s od stosunku ciśnień za i przed dyszą p_2/p_0 pokazano na rysunku 14.4. Równanie (14.14) opisuje tę zależność tylko w przedziale $\beta \leq p_2/p_0 \leq 1$. Dla $p_2/p_0 < \beta$ (ciśnienie w przestrzeni za dyszą niższe od ciśnienia krytycznego) w dyszy utrzymuje się maksymalne natężenie przepływu odpowiadające przepływowi krytycznemu, a liczba przepływu ma swą wartość maksymalną

$$\psi_s = \psi_s \max = \psi_s \Big|_{\frac{p_2}{p_0} = \beta}$$

Przyrównując do zera pochodną ψ_s względem zmiennej (p_2/p_0) otrzymujemy inną drogą wartość krytycznego stosunku ciśnień (14.12), a po wstawieniu tej wielkości do równania (14.14) wartość maksymalnej liczby przepływu

$$\psi_{s \max} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa+1}} \quad (14.16)$$

Ostatecznie więc w miejsce równania (14.14) należy napisać

$$\psi_s = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]}, & \text{dla } \beta \leq \frac{p_2}{p_0} \leq 1 \\ \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa+1}}, & \text{dla } 0 \leq \frac{p_2}{p_0} \leq \beta. \end{cases} \quad (14.17)$$

Wartości krytycznego stosunku ciśnień β i maksymalnej liczby przepływu $\psi_{s \max}$, dla niektórych wykładników adiabaty κ , przedstawiono w zestawieniu 14.1.

Zestawienie 14.1

Wartości β i $\psi_{s \max}$ dla przepływu izentropowego

	1,67	1,4	1,3	1,2	1,135
β	0,4895	0,5283	0,5457	0,564	0,5774
$\psi_{s \max}$	0,7238	0,6847	0,6671	0,6488	0,6359

Równanie (14.14) można w interesującym nas przedziale $\beta \leq p_2/p_0 \leq 1$ aproksymować z dobrym przybliżeniem równaniem elipsy o półosiach $(1-\beta)$ i $\psi_{s \max}$ i przesuniętej na osi p_2/p_0 o wartość β

$$\left(\frac{\psi_s}{\psi_{s \max}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{p_2}{p_0} - \beta}{1-\beta}\right)^2 = 1.$$

Po przekształceniach

$$\psi_s = \psi_{s \max} \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{p_2}{p_0} - \beta}{1-\beta}\right)^2}. \quad (14.18)$$

Przy przepływie adiabatycznym nieodwracalnym do tego samego końcowego ciśnienia, punkt 2 leży na wykresie i - s na prawo od punktu $2s$ (rys. 14.2). Z wykresu widoczne jest, że

$$i_1 - i_2 < i_1 - i_{2s},$$

co pociąga za sobą nierówność

$$w_2 < w_{2s}, \quad (a)$$

a także nierówność $T_2 > T_{2s}$, z której z kolei wynika, że przy tym samym ciśnieniu

$$v_2 > v_{2s}. \quad (b)$$

Po skojarzeniu nierówności (a) i (b) otrzymamy

$$\frac{A_2 w_2}{v_2} < \frac{A_2 w_{2s}}{v_{2s}},$$

czyli

$$\dot{m} < \dot{m}_s. \quad (14.19)$$

Strumień masy gazu jest więc w tych samych warunkach mniejszy dla przepływu nieodwracalnego. Jego wartość obliczamy z równania analogicznego do (14.15).

$$\dot{m} = A_2 \psi_s \sqrt{\frac{p_c}{v_0}}. \quad (14.20)$$

Zwykle wyznaczamy doświadczalnie maksymalną wartość rzeczywistej liczby przepływu ψ_{\max} , a dla obliczenia jej wartości dla $\beta < p_2/p_0 \leq 1$ stosujemy równanie (14.18) kładąc w nim ψ w miejsce ψ_s i ψ_{\max} w miejsce $\psi_{s \max}$.

14.5. Dysza de Laval

Rozprężenie gazu do ciśnień niższych od krytycznego $p_2 < \beta p_0$, przy uzyskaniu prędkości wylotowej większej od prędkości dźwięku jest możliwe w dyszy de Laval. Dysza ta powstaje z dyszy Bendemanna przez dodanie do niej części rozbieżnej. W części zbieżnej ma miejsce rozprężanie do parametrów krytycznych. Parametry te i prędkość dźwięku uzyskujemy w przekroju minimalnym. W części rozbieżnej następuje rozprężenie do ciśnienia niższego od krytycznego i dalszy wzrost prędkości. Taki przebieg zjawiska ma miejsce wówczas, gdy przez dyszę przepływa maksymalny strumień czynnika, taki, jak dla dyszy Bendemanna. Dla przepływu adiabatycznego odwracalnego

$$\dot{m}_{s \max} = A_m \psi_{s \max} \sqrt{\frac{p_0}{v_0}} \quad (14.21)$$

a dla przepływu nieodwracalnego (z tarcieniem)

$$\dot{m}_{\max} = A_m \psi_{\max} \sqrt{\frac{p_0}{v_0}} \quad (14.22)$$

Indeksem o oznaczono parametry spoczynkowe przed dyszą, które dla skończonej prędkości dolotowej w_1 (przy zastrzeżeniu, że $w_1 < a_1$) obliczamy z równań (13.42) i (13.43).

Aby przez dyszę przepływała maksymalna ilość czynnika, w przekroju wylotowym A_2 dyszy musi panować odpowiednio niskie ciśnienie. Zwykle zagadnienie jest stawiane odwrotnie: mamy rozprężyć gaz od parametrów spoczynkowych T_0, p_0 do ciśnienia niższego od krytycznego, $p_2 < \beta p_0$. Należy odpowiednio dobrać przekrój A_2 dyszy (lub jego stosunek do przekroju minimalnego A_m), by zagwarantować takie rozprężenie. Znając parametry spoczynkowe p_0, T_0 i końcowe

ciśnienie p_2 można wyznaczyć końcową entalpię i_2 i końcową prędkość

$$w_2 = \sqrt{2(i_0 - i_2)},$$

oraz końcową objętość właściwą v_2 . Podobnie dla ciśnienia $p_m = \beta p_0$ panującego w przekroju minimalnym można wyznaczyć prędkość $w_m = a_m$ i objętość właściwą v_m . Wielkości te umożliwiają obliczenie z równania ciągłości (13.18)

$$\frac{A_2 w_2}{v_2} = \frac{A_m w_m}{v_m}$$

stosunku przekrojów A_2/A_m

$$\frac{A_2}{A_m} = \frac{w_m v_2}{w_2 v_m} \quad (14.23)$$

Można także przyrównać strumień masy uzyskany z równania ciągłości dla przekroju A_2 ze strumieniem masy obliczonym z równania (14.22)

$$\frac{A_2 w_2}{v_2} = A_m \psi_{\max} \sqrt{\frac{p_0}{v_0}}$$

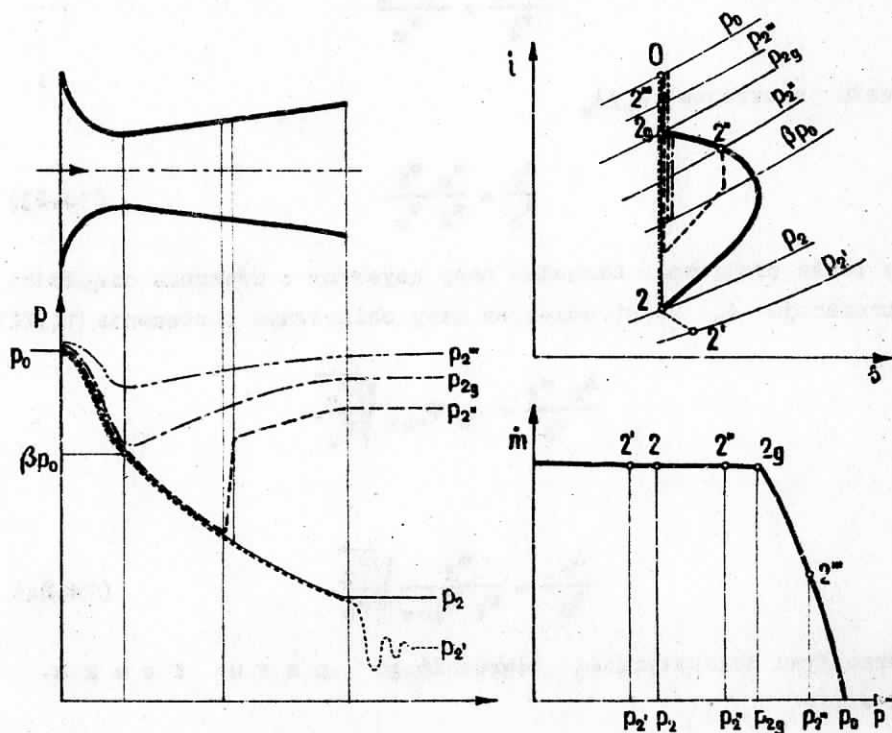
skąd

$$\frac{A_m}{A_2} = \frac{w_2}{v_2 \psi_{\max}} \sqrt{\frac{v_0}{p_0}} \quad (14.24)$$

Dla przepływu adiabatycznego odwracalnego g a z u d o s k o n a k e g o

$$\frac{A_m}{A_2} = \left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} \quad (14.25)$$

Jeżeli ciśnienie za dyszą p_2' jest niższe od ciśnienia p_2 , dla którego dobrano przekrój A_2 , to gaz w dyszy rozpręża się do ciśnienia p_2 , natomiast dalsze rozprężanie do ciśnienia p_2' odbywa się w przestrzeni poza dyszą, podobnie jak to jest w dyszy Bendemanna dla $p_2 < \beta p_0$. Strumień masy jest oczywiście maksymalny \dot{m}_{max} . Przy podwyższaniu ciśnienia za dyszą powyżej wartości p_2 , dla której dobrano przekrój A_2 ($p_2'' > p_2$), w dyszy nastąpi rozprężanie takie jak przy p_2 , lecz tylko do pewnego przekroju w części rozbieżnej dyszy. W przekroju tym ma miejsce nieodwracalne zjawisko tzw.



Rys. 14.5. Rozprężanie adiabatyczne gazu w dyszy de Laval'a przy różnych ciśnieniach za dyszą

uderzenia. Polega ono na nagłym wzroście ciśnienia i spadku prędkości. Nieodwracalność tego zjawiska przejawia się w tym, że wzrost ciśnienia jest mniejszy od tego, jaki można by uzyskać przy odwr-

calnym zmniejszeniu energii kinetycznej. Prędkość po uderzeniu jest mniejsza od prędkości dźwięku, po uderzeniu ma więc miejsce sprężanie gazu (równanie (13.40), $da > 0$, w $\langle a \rightarrow dp > 0$) i dalszy spadek prędkości. Przebieg ciśnienia w dyszy pokazano linią kropkowaną na rysunku 14.5. Ponieważ na odcinku zbieżnym dyszy przebieg zjawisk nie zmienia się w stosunku do pierwotnego i w przekroju minimalnym osiągnięto prędkość dźwięku, więc przez dyszę przepływa nadal maksymalny strumień gazu \dot{m}_{max} . W miarę jak ciśnienie p_2'' się podwyższa, uderzenie przybliża się do przekroju minimalnego stając się jednocześnie mniej intensywnym. Przy pewnym ciśnieniu za dyszą p_{2g} sięga ono do przekroju minimalnego, a jego intensywność jest nieskończenie mała. W wyniku tego następuje nieskończenie małe obniżenie prędkości poniżej prędkości dźwięku, sprawiając, że już od przekroju minimalnego rozpoczyna się sprężanie gazu i spadek prędkości. Ponieważ w przekroju minimalnym występuje jeszcze prędkość dźwięku, więc też strumień masy gazu jest maksymalny, $\dot{m} < \dot{m}_{max}$. Podwyższanie ciśnienia powyżej p_{2g} sprawia, że w przekroju minimalnym prędkość jest już o skończoną wartość mniejsza od prędkości dźwięku, a więc strumień masy jest mniejszy od maksymalnego, $\dot{m} < \dot{m}_{max}$. Dlatego ciśnienie p_{2g} nazywamy ciśnieniem granicznym. Ciśnienie graniczne jest zawsze wyższe od ciśnienia krytycznego

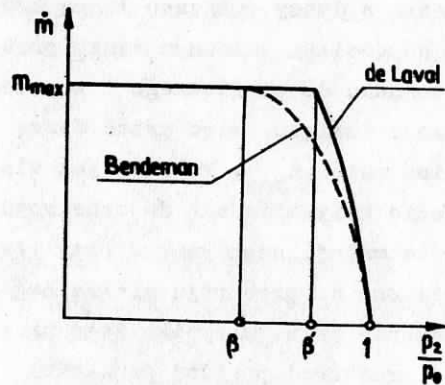
$$p_{2g} > \beta p_0'$$

gdyż w przypadku wystąpienia tego ciśnienia za dyszą w części rozbieżnej dyszy ma miejsce sprężanie gazu (wzrost ciśnienia) od ciśnienia krytycznego βp_0 panującego w przekroju minimalnym. Stosunek ciśnień

$$\beta' = \frac{p_{2g}}{p_0} > \beta \quad (14.26)$$

nazywamy granicznym stosunkiem ciśnień dyszy de Laval'a. Dysza de Laval'a zachowuje więc stałą i maksymalną wartość strumienia masy dla znacznie szerszego zakresu ciśnień za dyszą. Porównanie zależ-

ności strumienia masy od stosunku ciśnień za i przed dyszą, dla dyszy de Laval'a i dyszy Bendemanna pokazano na rysunku 14.6. Łatwo



Rys. 14.6. Porównanie zależności natężenia przepływu od stosunku ciśnień za i przed dyszą, dla dyszy de Laval'a i dyszy Bendemanna

zauważyć, że wartość granicznego stosunku ciśnień β' zależy od stopnia rozwarcia dyszy mierzonego stosunkiem przekroju wylotowego do przekroju minimalnego A_2/A_m i rośnie wraz z tym stosunkiem.

Wyznaczenie parametrów u wylotu z dyszy, w której występuje uderzenie, gdy znane jest ciśnienie p_2'' jest możliwe bez opisywania zjawiska uderzenia. Wystarczy bowiem wyjść z podstawowych praw: równania ciągłości dla przekroju wylotowego

$$\frac{A_2 w_2}{v_2} = \dot{m}_{\max} \quad (14.27)$$

oraz równania bilansu

$$i_2 + \frac{w_2^2}{2} = i_0 \quad (14.28)$$

W równaniu ciągłości wykorzystano poczynione wyżej spostrzeżenia, że dla $p_2 \leq p_{2g}$ $\dot{m} = \dot{m}_{\max}$. Kojarząc oba te równania (podstawiając prędkość wyliczoną z równania (14.27) do równania (14.28)) otrzymujemy równanie

$$i_0 = i_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}_{\max}}{A_2} \right)^2 v_2^2 \quad (14.29)$$

zwane równaniem Fanno. Wiąże ono wszystkie stany możliwe do osiągnięcia w przekroju A_2 przy maksymalnym strumieniu masy, \dot{m}_{\max} . Chodzi tu o stany możliwe z punktu widzenia prawa zachowania masy (równanie ciągłości) i prawa zachowania energii. Druga zasada termodynamiki eliminuje spośród tych stanów te, dla których nie jest spełniony warunek

$$s_2 \geq s_0 \quad (14.30)$$

Geometryczną interpretacją równania (14.29) jest krzywa Fanno, będąca zbiorem punktów odpowiadających stanom możliwym do osiągnięcia w przekroju A_2 . Na wykresie $i-s$ będącym częścią rysunku 14.5 przedstawiono krzywą Fanno, a na niej wszystkie omówione wyżej stany końcowe. Punkt 2 odpowiadający obliczeniowemu reżimowi pracy dyszy leży na linii $s=s_0$ (zakładamy, że przepływ jest adiabatyczny beztarciowy, nieodwracalność może być wywołana jedynie uderzeniem). Punkt 2'' odpowiadający ciśnieniu $p_2 < p_2'' < p_{2g}$ leży na krzywej Fanno na prawo od linii $s=s_0$, gdyż wskutek nieodwracalności przemiany uderzenia $s_2'' > s_0$. Jeżeli ciśnienie za dyszą jest równe ciśnieniu granicznemu p_{2g} przepływ jest jeszcze maksymalny, a więc punkt 2g leży na krzywej Fanno. Ponieważ uderzenie redukuje się tu do zera, przepływ jest odwracalny, $s_{2g} = s_0$. Gaz rozpręża się w tym przypadku izentropowo do ciśnienia βp_0 (w przekroju minimalnym), a następnie spręża izentropowo do ciśnienia p_{2g} .

Jeżeli $p_2 > p_{2g}$, to $\dot{m} < \dot{m}_{\max}$ i parametry stanu końcowego nie leżą na krzywej Fanno odpowiadającej maksymalnemu przepływowi. Przepływ jest wówczas odwracalny i stany te znajdują się na izentropie $s = s_0$ pomiędzy punktami 0 i 2g.

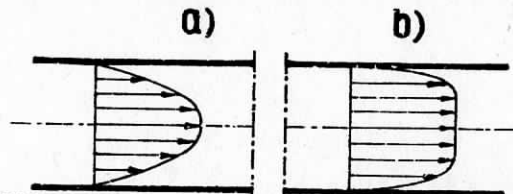
R o z d z i a ł 15

PRZEPŁYW GAZU W RUROCIĄGACH

15.1. Tarcie przy przepływie w rurociągu

Rozpatrując ustalony przepływ gazu w rurociągu interesujemy się w pierwszym rzędzie spadkiem ciśnienia w funkcji natężenia przepływu gazu przez rurociąg czy też, co jest równoważne, w funkcji prędkości przepływu. Spadek ciśnienia przy przepływie w rurociągu związany jest z nieodwracalnym zjawiskiem tarcia. Zjawiskiem wtórnym i często kwalifikującym się do pominięcia jest spadek ciśnienia spowodowany wzrostem energii kinetycznej. Gdyby nie było tarcia przepływ w rurociągu nie powodowałby zmiany stanu gazu, a więc i zmiany prędkości.

Tarcie przy przepływie jest, jak wiadomo (patrz rozdz. 13.3.2), spowodowane lepkością płynu. Ścisłe analityczne wyznaczenie pracy tarcia jest możliwe dla przepływu laminarnego, dla którego obowiązuje równanie ruchu (13.25a). Dla przepływu turbulentnego brak jest zadowalającego opisu matematycznego i różne zjawiska związane z turbulencją opisuje się empirycznymi lub półempirycznymi równaniami. Doświadczenie pokazuje, że dla przepływu turbulentnego główna zmiana prędkości pomiędzy ścianką (prędkość zerowa) i osią rury (prędkość maksymalna) ma miejsce w cienkiej warstwie leżącej przy ścianie, tzw. warstwie przyściennej (rys. 15.1). W tej warstwie



Rys. 15.1 Profil prędkości przy przepływie laminarnym (a) i turbulentnym (b)

też głównie koncentruje się praca tarcia. Praca tarcia wykonywana na danym odcinku rurociągu rośnie więc przy tej samej prędkości proporcjonalnie do średnicy. Ale jednocześnie strumień masy czynnika rośnie proporcjonalnie do kwadratu średnicy (wprost proporcjonalnie do powierzchni przekroju rurociągu). Praca tarcia dl_f przypadająca na jednostkę masy jest więc odwrotnie proporcjonalna do średnicy w pierwszej potęgze. Oczywiście jest również to, że praca tarcia dl_f wykonana na długości dx rury jest do niej wprost proporcjonalna. Pozostałe czynniki wpływające na pracę tarcia, a więc prędkość przepływu (średnią w przekroju) i lepkość uwzględniamy empirycznymi członami. Przyjmujemy mianowicie, że jednostkowa praca tarcia dl_f jest wprost proporcjonalna do jednostkowej (właściwej) energii kinetycznej $w^2/2$ i do pewnego współczynnika empirycznego λ_f zwanego l i c z b ą t a r c i a. Otrzymujemy ostatecznie równanie

$$dl_f = \lambda_f \frac{w^2}{2} \cdot \frac{dx}{D} \quad (15.1)$$

zwane równaniem Darcy-Weissbacha. W literaturze anglosaskiej używany jest na ogół tzw. współczynnik oporu Fanninga będący czwartą częścią liczby tarcia

$$f = \frac{\lambda_f}{4}$$

i równanie (15.1) ma wówczas postać

$$dl_f = 2 f w^2 \frac{dx}{D} \quad (15.1a)$$

Równanie (15.1) można stosować również dla kanałów o przekrojach niekołowych. Należy wówczas posługiwać się zastępczą ś r e d n i c ą h y d r a u l i c z n ą

$$D_e = \frac{4 A}{U}, \quad (15.2)$$

gdzie A jest powierzchnią przekroju kanału, U - jego obwodem.

Liczba tarcia jest wielkością bezwymiarową, co łatwo stwierdzić analizując wymiary w równaniu (15.1). Jako wielkość bezwymiarowa może zależeć tylko od wielkości bezwymiarowych, będących kryteriami podobieństwa przepływu. Kryterium podobieństwa hydrodynamicznego jest liczba Reynoldsa

$$Re = \frac{w D}{\nu} \quad (15.3)$$

Ponieważ dwa koła o różnych średnicach są zawsze podobne, więc dla rur o gładkich ścianach nie wystąpi kryterium podobieństwa geometrycznego (liczba tarcia jako wielkość lokalna nie zależy od stosunku długości rury do średnicy). Dla rury chropowatej kryterium podobieństwa geometrycznego jest stosunkiem przeciętnej wysokości nierówności e do średnicy D . A zatem

$$\lambda_f = f\left(Re, \frac{e}{D}\right).$$

Zależność tę badano doświadczalnie. Dla użytku praktycznego sporządzono wykres (rys. 15.2) oraz opracowano równania empiryczne. Dla rur gładkich w zakresie liczb Reynoldsa $5 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^5$ można stosować wzór Blasiusa

$$\lambda_f = 0,316 Re^{-0,25}, \quad (15.4)$$

a dla zakresu $10^4 \leq Re \leq 3 \cdot 10^6$ równanie Nikuradsego

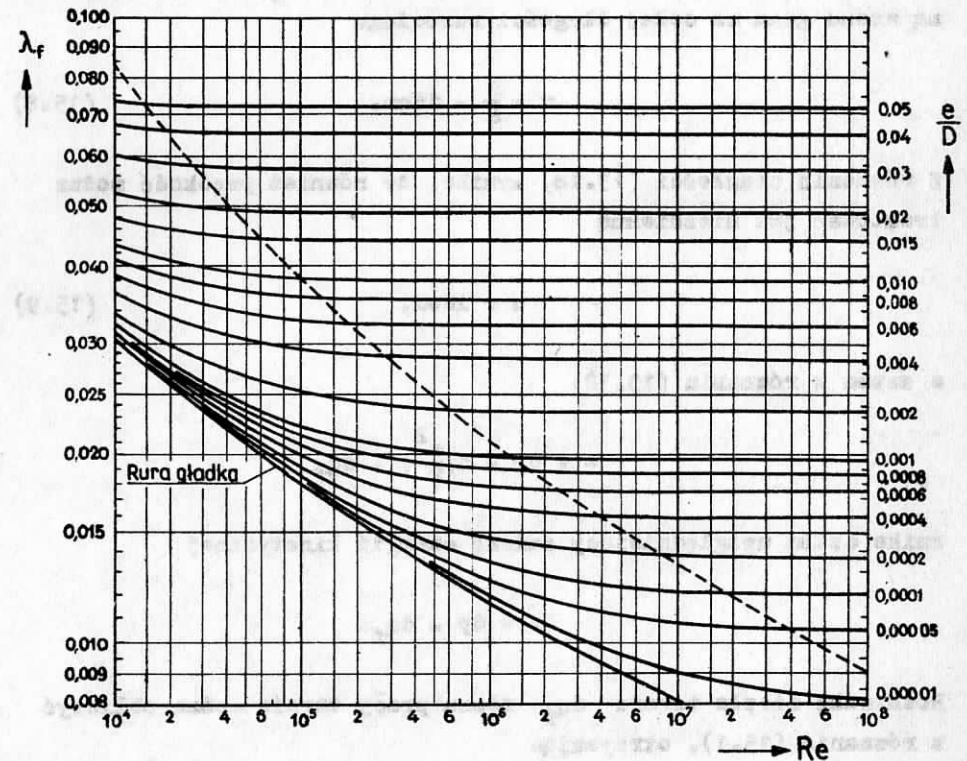
$$\lambda_f = 0,0032 + 0,221 Re^{-0,237}. \quad (15.5)$$

Dla dostatecznie dużych liczb Reynoldsa, jak widać z rysunku 15.2 liczba tarcia nieznacznie zależy od liczby Reynoldsa i dla rur chropowatych pozostaje jedynie zależność od względnej chropowatości e/D . Zależność tę aproksymuje równanie

$$\lambda_f = \frac{1}{(1,74 + 2 \lg \frac{D}{2e})^2}. \quad (15.6)$$

Liczbę tarcia można wyznaczyć teoretycznie jedynie dla przepływu laminarnego ($Re < 2300$)

$$\lambda_f = \frac{64}{Re}. \quad (15.7)$$



Rys. 15.2. Liczba tarcia λ_f

W zakresie liczb Reynoldsa $2300 < Re < 5000$ występują stany pośrednie pomiędzy przepływem laminarnym a w pełni rozwiniętym przepływem turbulentnym. Stopień turbulizacji przepływu może być różny, może w granicznym przypadku mieć miejsce sztuczne "przetrzymanie" laminarności przepływu. Stąd też w strefie tej występuje luka zarówno na wykresie, jak i we wzorach.

15.2. Ustalony przepływ gazu w rurociągu

15.2.1. Rurociąg krótki

Rurociąg nazywany krótkim wtedy, gdy można zaniedbać zmianę objętości właściwej v (a więc i gęstości $\rho = \frac{1}{v}$) spowodowanej zmianą stanu gazu na całej długości rurociągu

$$v = \frac{1}{\rho} = \text{idem.} \quad (15.8)$$

Z równania ciągłości (13.18) wynika, że również prędkość można traktować jak niezmienną

$$w = \text{idem,} \quad (15.9)$$

a zatem w równaniu (13.32)

$$-v dp = d\left(\frac{w^2}{2}\right) + dq_f$$

znika osztem uwzględniający zmianę energii kinetycznej

$$-v dp = dq_f$$

Różniczkę ciepła tarcia dq_f równą pracy tarcia można obliczyć z równania (15.1), otrzymując

$$-v dp = \lambda_f \frac{w^2}{2} \frac{dx}{D} \quad (15.10)$$

W rurociągu o długości L , w którym występuje spadek ciśnienia $\Delta p = p_1 - p_2$ całkowanie równania (15.10) od wlotu ($x=0, p=p_1$) do wylotu ($x=L, p=p_2$) daje

$$- \int_{p_1}^{p_2} v dp = \int_0^L \lambda_f \frac{w^2}{2} \frac{dx}{D}$$

a po uwzględnieniu warunków (15.8) i (15.9) i po wykonaniu całkowania

$$v(p_1 - p_2) = \lambda_f \frac{w^2}{2} \frac{L}{D}$$

Wprowadzając zamiast objętości właściwej gęstość ρ oraz oznaczając spadek ciśnienia przez Δp , otrzymujemy

$$\Delta p = \lambda_f \frac{\rho w^2}{2} \frac{L}{D} \quad (15.11)$$

Równanie powyższe można zapisać w postaci bezwymiarowej, po wprowadzeniu liczby Eulera

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho w^2}$$

$$Eu = \frac{1}{2} \lambda_f \frac{L}{D} \quad (15.12)$$

Liczba Eulera jest więc zależna od liczby Reynoldsa (poprzez λ_f) i od stosunku L/D , co przewidzieliśmy w rozdziale 12 w oparciu o teorię podobieństwa.

Dla przepływu laminarnego po podstawieniu zależności (15.7) otrzymujemy

$$Eu = \frac{32}{Re} \frac{L}{D} \quad (15.13)$$

lub w zmiennych pierwotnych

$$\Delta p = \frac{32 \eta L}{D^2} w \quad (15.14)$$

Spadek ciśnienia jest więc wprost proporcjonalny do prędkości przepływu. Wyrażając prędkość przepływu przez strumień masy z równania ciągłości

$$w = \frac{\dot{m}}{A \rho} = \frac{4\dot{m}}{\pi D^2 \rho}$$

otrzymujemy zależność

$$\Delta p = \frac{128 \nu L}{\pi D^4} \dot{m} \quad (15.15)$$

będącą analogiem prawa Ohma

$$\Delta p = R L \dot{m}. \quad (15.16)$$

Opór jednostkowy rury

$$R = \frac{128 \nu}{\pi D^4} = \frac{8 \pi \nu}{A^2} \quad (15.17)$$

jest wielkością niezmienną. Zależność (15.16) można napisać również dla przepływu turbulentnego, ale wówczas opór jednostkowy

$$R = \frac{\lambda_f w}{2 D A} \quad (15.18)$$

zależy od prędkości w , a więc i od strumienia masy \dot{m} .

15.2.2. Przepływ izotermiczny gazu doskonałego w rurociągu długim

Uwzględnienie zmian gęstości i prędkości przy przepływie w rurociągu jest stosunkowo proste dla gazu doskonałego, przy założeniu, że przepływ jest izotermiczny. Założenie to jest spełnione dość dobrze wtedy, gdy niez izolowanym rurociągiem płynie gaz o parametrach środowiska otaczającego rurociąg (np. rurociąg napowietrzny, lub rurociąg ułożony w ziemi). Wymiana ciepła ze środowiskiem poprzez ściankę rurociągu niweluje wszelkie zmiany temperatury spowodowane zmianą stanu gazu podczas przepływu.

W celu wyznaczenia spadku ciśnienia wychodzimy, jak poprzednio, z równania (13.32), podstawiając w nim pracę (ciepło) tarcia ze wzoru (15.1) i rozwijając różniczkę energii kinetycznej

$$-v dp = w dw + \lambda_f \frac{w^2}{2} \frac{dx}{D}.$$

Po obustronnym podzieleniu przez $w^2/2$ mamy

$$-\frac{2v dp}{w^2} = 2 \frac{dw}{w} + \frac{\lambda_f}{D} dx. \quad (a)$$

Z równania ciągłości (13.18) wynika przy $A = \text{idem}$ (stały przekrój rurociągu)

$$\frac{w}{v} = \frac{w_1}{v_1} = \text{idem}, \quad (b)$$

gdzie indeksem 1 oznaczono stan początkowy gazu (u wlotu do rury).

Z równania izotermy gazu doskonałego

$$pv = p_1 v_1 = \text{idem} \quad (c)$$

po skojarzeniu z równaniem (b) otrzymujemy

$$pw = p_1 w_1 = \text{idem}. \quad (d)$$

Zlogarytmowanie, a następnie zróżniczkowanie równania (d) daje

$$\frac{dp}{p} + \frac{dw}{w} = 0,$$

czyli

$$\frac{dw}{w} = - \frac{dp}{p}. \quad (e)$$

Dysponując równaniami (b) - (e) możemy w równaniu (a) wprowadzić jako zmienne jedynie ciśnienie p i współrzędną x , a pozostałe wielkości wyrazić przez parametry początkowe. W tym celu w miejsce dw/w podstawiamy wyrażenie (e), a lewą stronę równania (a) przekształcamy następująco

$$-\frac{2v}{w^2} dp = -2 \frac{v}{pw^2} p dp = -2 \frac{v}{w} \cdot \frac{1}{pw} p dp = -2 \frac{v_1}{w_1} \cdot \frac{1}{p_1 w_1} p dp,$$

wykorzystując równania (c) i (d). Ostatecznie więc zamiast równania (a) otrzymujemy równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

$$-\frac{v_1}{p_1 w_1} 2p dp = -2 \frac{dp}{p} + \frac{\lambda_f}{D} dx.$$

Po scałkowaniu w granicach długości rurociągu i przy założeniu, że $\lambda_f = \text{idem}$, mamy

$$-\frac{v_1}{p_1 w_1} \int_{p_1}^{p_2} p dp = -2 \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} + \frac{\lambda_f}{D} \int_0^L dx.$$

Wykonując całkowania i dokonując prostych przekształceń otrzymujemy ostatecznie

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{p_1 w_1^2}{v_1} \left(2 \ln \frac{p_1}{p_2} + \lambda_f \frac{L}{D} \right). \quad (15.19)$$

W większości przypadków spotykanych w praktyce człon zawierający logarytm jest bardzo mały

$$2 \ln \frac{p_1}{p_2} \ll \lambda_f \frac{L}{D}$$

i można go w równaniu (15.19) pominąć, uzyskując równanie

$$p_1^2 - p_2^2 = \lambda_f \frac{p_1 w_1^2}{v_1} \frac{L}{D}, \quad (15.20)$$

które już łatwo rozwikłać względem ciśnienia końcowego p_2 . Równanie to można zapisać w postaci podobnej do równania (15.11) dla rurociągu krótkiego

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2 p_1} = \lambda_f \frac{\rho_1 w_1^2}{2} \frac{L}{D} \quad (15.20a)$$

i przechodzi w to równanie przy założeniu, że $p_1 + p_2 \approx 2p_1$.

Literatura specjalistyczna poświęcona termodynamice przepływów omawia również inne przypadki przepływu gazu w rurociągu długim -

np. przepływ adiabatyczny. Uzyskuje się dla tych przypadków skomplikowane zależności nie dające się rozwikłać względem ciśnienia końcowego. Warto tu jedynie odnotować, że strumień masy płynącej rurociągiem rośnie wprawdzie w miarę obniżania ciśnienia końcowego (przy stałych parametrach dolotowych) ale nie w sposób nieograniczony. Podobnie jak dla dyszy istnieje pewna maksymalna wartość strumienia masy, której nie można przekroczyć. Krytyczny stosunek ciśnień, przy którym pojawia się \dot{m}_{\max} jest różny od tegoż dla dyszy i zależy od bezwymiarowego kryterium $\frac{\lambda_f L}{D}$.

15.3. Lokalne opory przepływu

Opisane metody obliczania spadków ciśnień w rurociągach dotyczą prostych odcinków rurociągu. Jeżeli w rurociągu występują zagięcia, łuki, zmiany przekroju lub wbudowane są dodatkowe elementy stwarzające opór (np. zawory, zwężki itp.), to do spadków ciśnień wyliczonych jak dla rurociągu prostego należy dodać dodatkowe spadki ciśnienia związane z lokalnymi oporami przepływu. Źródłem oporu lokalnego jest również dopływ gazu do rurociągu i wypływ z rurociągu. Spadek ciśnienia na oporze lokalnym obliczamy z równania empirycznego, skutecznego dla przepływu turbulentnego

$$\Delta p = \zeta \rho \frac{w^2}{2}, \quad (15.21)$$

gdzie ζ jest liczbą oporu lokalnego. Równanie (15.21) można zapisać w postaci bezwymiarowej

$$Eu = \frac{1}{2} \zeta. \quad (15.21a)$$

Innym sposobem uwzględnienia lokalnych oporów przepływu jest dodanie do długości faktycznej rurociągu tzw. równoważnych długości odpowiadających tym oporom. Tablice wartości liczb oporu lokalnego i równoważnych długości rurociągu podaje literatura specjalistyczna.

15.4. Nieustalony, adiabatyczny przepływ gazu w rurociągu

Zakłócenie parametrów na wlocie lub na wylocie z rurociągu inicjuje proces nieustalonego przepływu gazu, podczas którego wszelkie wielkości opisujące przepływ zależą nie tylko od położenia (współrzędna x) jak przy przepływie ustalonym, lecz również od czasu. W szczególności interesują nas zmiany ciśnienia i strumienia masy

$$\begin{aligned} p &= p(x, \tau), \\ \dot{m} &= \dot{m}(x, \tau). \end{aligned} \quad (15.22)$$

Dla uzyskania równań determinujących te funkcje wyjdziemy znów z podstawowych praw: zachowania masy (równanie ciągłości) i zachowania energii.

Równanie ciągłości dla jednowymiarowego przepływu nieustalonego (13.17)

$$A \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0$$

zawiera niedogodną zmienną ρ . Wykorzystując adiabatyczność procesu możemy dla jej wyrugowania dokonać następującej operacji

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial \tau}$$

Tarcie występujące podczas przepływu powoduje nieznaczące odstępstwa od izentropowości adiabaty, stąd pochodna $\partial \rho / \partial p$ może być traktowana jak pochodna przy stałej entropii i wyrażona przez prędkość dźwięku (13.27)

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{a^2}$$

Ostatecznie więc z równania ciągłości otrzymujemy równanie różniczkowe dla funkcji (15.22)

$$\frac{A}{a^2} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0. \quad (15.23)$$

W rozdziale 13 wyprowadziliśmy równanie bilansu dla przepływu ustalonego. Jest to równanie (13.32), które po wyrażeniu różniczek przez współrzędną x ma postać

$$\frac{d\left(\frac{w}{2}\right)}{dx} = -v \frac{dp}{dx} - \frac{dl_f}{dx},$$

a po podstawieniu równania (15.1) na pracę tarcia

$$\frac{d\left(\frac{w}{2}\right)}{dx} = -v \frac{dp}{dx} - \lambda_f \frac{w^2}{2D}.$$

Lewa strona równania przedstawia pochodną energii kinetycznej, wyrażająca jej zmianę między przekrojami x i $x+dx$ (na wlocie i na wylocie z bilansowanego elementu rury o długości dx). Przy przepływie nieustalonym ma miejsce również zmiana energii kinetycznej masy zawartej w bilansowanym elemencie, wyrażająca się pochodną $\frac{\partial w}{\partial \tau}$. Po uzupełnieniu tym członem lewej strony równania bilansu dla przepływu ustalonego otrzymujemy równanie bilansu dla przepływu nieustalonego

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial\left(\frac{w^2}{2}\right)}{\partial x} = -v \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda_f \frac{w^2}{2D}. \quad (15.24)$$

Równanie powyższe można wyprowadzić również z równania ruchu. Traktując przepływ jako jednowymiarowy możemy posłużyć się jednowymiarową postacią równania (13.25a). Człony $\frac{Dw}{Dt}$ i $v \nabla p$ zastąpimy ich składowymi w kierunku osi x $\frac{Dw}{Dt}$ i $v \frac{\partial p}{\partial x}$, człon \bar{g} dla rurociągu poziomego odpada. Natomiast człon $v \nabla w$ uwzględniającego wpływ lepkości nie możemy wykorzystać, gdy dotyczy on przepływu laminarnego. Wszystkie człony równania mają sens sił odniesionych do jednostki masy. Człon $\frac{Dw}{Dt}$ reprezentuje siły bezwładności, człon $-v \frac{\partial p}{\partial x}$ siłę ciśnienia. Ostatni człon winien więc być siłą tarcia odniesioną do jednostki masy płynu i jest ilorazem pracy tarcia dl_f wykonanej na odcinku dx do długości tego odcinka. Znak tego członu

jest ujemny, gdyż siła tarcia działa przeciwnie do ruchu. Ostatecznie więc jednowymiarowe równanie ruchu ma postać

$$\frac{Dw}{Dt} = -v \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial l_f}{\partial x}$$

Rozpisując jednowymiarową pochodną substancjalną na podstawie równania (13.6) i wstawiając po prawej stronie zależność (15.1), otrzymujemy równanie

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} = -v \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda_f \frac{w^2}{2D}$$

identyczne z równaniem (15.24).

Równanie (15.24) jest nieliniowe względem prędkości, a więc i względem proporcjonalnego do niej strumienia masy. Nieliniowość powoduje również objętość właściwa v zależna od ciśnienia. W celu linearyzacji przyjmujemy następujące założenia upraszczające:

- energia kinetyczna gazu zmienia się nieznacznie wzdłuż długości rurociągu

$$\left| \frac{\partial \left(\frac{w^2}{2} \right)}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right|$$

- objętość właściwą v traktujemy jako niezmienną.

Po uwzględnieniu powyższego i po pomnożeniu równania (15.24) przez $\xi = 1/v$ otrzymujemy

$$\frac{1}{A} \frac{\partial (\Lambda g w)}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\lambda_f w}{2DA} \Lambda g w.$$

Jeżeli A jest powierzchnią przekroju rurociągu, to w myśl równania ciągłości

$$\dot{m} = \Lambda g w.$$

Ostatecznie mamy więc równanie

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{\lambda_f w}{2DA} \dot{m} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (15.25)$$

stanowiące wraz z równaniem (15.23) układ równań różniczkowych dla funkcji $p=p(x,t)$ i $\dot{m}=\dot{m}(x,t)$. Równania te są analogiczne do równań elektrycznej linii długiej bez upływności. Wprowadzając podobne współczynniki

- opór jednostkowy (równanie (15.18))

$$R = \frac{\lambda_f w}{2 DA}, \quad (15.18)$$

- inertancję

$$L = \frac{1}{A}, \quad (15.26)$$

- pojemność

$$C = \frac{A}{a}, \quad (15.27)$$

przepiszemy równania (15.23) i (15.25) w następującej postaci

$$L \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + R \dot{m} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (15.28)$$

$$C \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0. \quad (15.29)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań różniczkowych, tzn. znalezienie funkcji $\dot{m} = \dot{m}(x,t)$ i $p = p(x,t)$, wymaga dodatkowo znajomości warunków początkowych (wartości funkcji dla $t = 0$) i warunków brzegowych (przebiegu zmian szukaných funkcji na jednym z końców rury).

R o z d z i a ł 16

PODSTAWOWE POJĘCIA Z WYMIANY CIEPŁA

Pojęcie ciepła jako sposobu przekazywania energii omówiono w rozdziale 4.3.3, przy okazji omawiania pierwszej zasady termodynamiki. Druga zasada termodynamiki wniosła dodatkowe informacje dotyczące ciepła. Wynikło z niej mianowicie (rozdział 5.3.2), że ciepło nie może płynąć w kierunku wzrostu temperatury, a przepływ ciepła w kierunku spadku temperatury jest zjawiskiem nieodwracalnym. Im większa jest różnica temperatur, tym większa jest nieodwracalność, a zarazem spontaniczność i intensywność przepływu ciepła. Te jakościowe związki, których wyrazem matematycznym są co najwyżej nierówności, nie wystarczają dla potrzeb praktycznych. Poszukiwaniem związków ilościowych, wiążących ilość przepływającego ciepła z różnicą temperatur i czasem zajmuje się odrębny dział termodynamiki zwany *w y m i a n ą c i e p ł a*^{x)}. Z uwagi na zastosowania praktyczne dział ten jest szczególnie mocno rozbudowany w termodynamice technicznej i niekiedy nawet traktowany jak odrębna dyscyplina.

W stanie równowagi układu temperatura jest wyrównana i nie występuje przepływ ciepła. Zakłócenie stanu równowagi polegające na zróżnicowaniu temperatur wyzwala nieodwracalny proces przepływu ciepła. Proces ten jest procesem *n i e u s t a l o n y m*, gdyż temperatury w poszczególnych punktach układu zmieniają się w czasie. Jeżeli zakłócenie miało charakter jednorazowy, to po dostatecznie długim czasie zostanie osiągnięty nowy stan równowagi układu. Ścisłej biorąc czas ten jest nieskończenie długi, gdyż w mia-

^{x)} inne nazwy: przekazywanie ciepła, przepływ ciepła, ruch ciepła.

re zbliżania się do stanu równowagi maleją różnice temperatur, a więc coraz mniej intensywny jest przepływ ciepła wyrównujący te różnice.

Jeżeli zakłócenie ma charakter trwały (np. ciągłe ogrzewanie jednej części układu i ciągłe chłodzenie drugiej jego części) nie dochodzi do ustalenia się stanu równowagi. Po dostatecznie długim (teoretycznie nieskończenie długim) czasie dochodzi jedynie do ustalenia się pola temperatur w układzie. Temperatury w poszczególnych częściach układu są różne, ale nie zmieniają się w czasie. Zróżnicowanie temperatur wywołuje nadal przepływ ciepła, ale ze stałości temperatur wynika stałość strumieni ciepła. Taki proces nazywamy *u s t a l o n ą* wymianą ciepła. Występuje ona we wszystkich maszynach i urządzeniach cieplnych w czasie ich pracy ciągłej i ustalonej. Natomiast podczas rozruchu, czy też przy przejściu na inne obciążenie, a także przy zatrzymywaniu, występują w tych maszynach i urządzeniach procesy nieustalone.

Jednym ze sposobów wymiany ciepła jest *p r z e w o d z e n i e*. Polega ono na bezpośrednim przekazywaniu energii wewnętrznej drobinom o niższej temperaturze przez stykające się z nimi drobiny tego samego lub innego ciała posiadające wyższą temperaturę. Przewodzenie ciepła zachodzi we wszystkich stanach skupienia materii. W płynach (cieczach lub gazach) przewodzeniu mogą towarzyszyć wzajemne przemieszczenia drobin płynu. Wymiana ciepła, jaka wówczas występuje, nazywa się *k o n w e k c j ą*. Ścisłej biorąc konwekcją nazywamy wymianę ciepła pomiędzy powierzchnią ciała stałego i przylegającym do niej płynem, w którym oprócz przewodzenia występuje ruch. Ten sposób wymiany ciepła nazywa się również *w n i k a n i e m c i e p ł a* (lub przejmowaniem ciepła). Nie należy kojarzyć wymiany energii w postaci ciepła, drogą konwekcji, z przekazywaniem energii w postaci energii strugi. Powierzchnia ciała stałego nie wchłania bowiem omywającej ją strugi płynu, a jedynie odbiera od niej energię, którą należy zaklasyfikować do ciepła. Gdyby płyn nie miał zdolności przewodzenia ciepła, to nawet najbardziej intensywne ruchy konwekcyjne nie spowodowałyby wymiany

ciepła między nim a powierzchnią. Do konwekcyjnej wymiany ciepła (wnikania ciepła) zalicza się również wymianę ciepła pomiędzy powierzchnią i omywającym ją płynem, w którym występują oprócz przewodzenia ciepła zjawiska zmiany stanu skupienia. Może to być w r z e n i e cieczy na powierzchni oddającej jej ciepło lub s k r a p l a n i e się pary na powierzchni odbierającej ciepło.

Przewodzenie i konwekcja wymagają bezpośredniego kontaktu ciał wymieniających energię. Wymiana ciepła może się odbywać również bez tego kontaktu w sposób zwany p r o m i e n i o w a n i e m. Polega ono na przekazywaniu energii w formie fal elektromagnetycznych. Z punktu widzenia termodynamiki ten sposób przekazywania energii do układu lub z układu należy również zaliczyć do ciepła.

Zazwyczaj mają miejsce złożone przypadki wymiany ciepła polegające na równoczesnym występowaniu dwóch lub trzech sposobów wymiany ciepła. I tak np. wymiana ciepła pomiędzy spalinami i wodą w kotle parowym odbywa się następująco: powierzchnia zewnętrzna rury kotła otrzymuje od spalin energię w postaci ciepła drogą konwekcji i promieniowania. Ciepło to jest następnie przewodzone poprzez ściankę rury i wewnętrzna powierzchnia rury oddaje je drogą konwekcji wodzie płynącej w rurze. Wymianę ciepła pomiędzy dwoma płynami rozdzielonymi ścianką nazywamy ogólnie p r z e n i k a n i e m c i e p ł a.

Urządzenia, których głównym celem jest wymiana ciepła pomiędzy dwoma nie mieszającymi się płynami nazywamy w y m i e n n i k a m i c i e p ł a. Zaliczamy do nich również te urządzenia, w których jeden lub oba płyny zmieniają przy tym swój stan skupienia. W wymienniku ciepła oba płyny mogą wymieniać ciepło drogą przenikania przez przegrodę rozdzielającą je (np. ścianę rury). Wymienniki takie nazywamy wymiennikami p r z e p o n o w y m i. Drugi typ wymienników to wymienniki a k u m u l a c y j n e. W wymiennikach tych oba płyny omywają na przemian to samo ciało stałe zwane wypełnieniem wymiennika. Wypełnienie nagrzewa się od płynu o wyższej temperaturze i oddaje ciepło płynowi zimnemu.

Efektem globalnym wymiany ciepła jest s t r u m i e n i e c i e p ł a \dot{Q} . Natomiast lokalnie, w danym punkcie układu, intensywność wymiany ciepła charakteryzuje g ę s t o ś ć s t r u m i e n i a c i e p ł a odniesiona do powierzchni, przez którą przepływa ciepło. Jeżeli ciepło przepływa prostopadle do powierzchni odniesienia, to wówczas można gęstość strumienia ciepła traktować jako skalar \dot{q} spełniający równanie

$$d\dot{Q} = \dot{q} dA, \quad (16.1)$$

gdzie $d\dot{Q}$ jest strumieniem ciepła przepływającym przez powierzchnię dA . Gdy ciepło nie płynie prostopadle do powierzchni odniesienia, należy zarówno element powierzchni $d\vec{A}$ jak i gęstość strumienia ciepła \vec{q} traktować jak wektory (kierunek wektora $d\vec{A}$ jest prostopadły do powierzchni - por. rozdział 13.2). W miejsce równania (16.1) pojawia się ogólniejsze równanie wektorowe

$$d\dot{Q} = \vec{q} d\vec{A}, \quad (16.2)$$

w którym po prawej stronie występuje iloczyn skalarowy wektorów. Dla nieustalonej wymiany ciepła strumień ciepła i jego gęstość zależą od czasu, a gęstość strumienia ciepła może ponadto zależeć od współrzędnych geometrycznych. Dla ustalonej wymiany ciepła znika zależność od czasu. Jednostką strumienia ciepła w układzie SI jest W (wat), a jednostką tradycyjną kcal/h. Pomiędzy tymi jednostkami istnieje związek

$$1 \text{ kcal/h} = 1,163 \text{ W}. \quad (16.3)$$

Jednostką gęstości strumienia ciepła jest odpowiednio W/m^2 i $\text{kcal/m}^2\text{h}$, przy czym obowiązuje również związek (16.3).

R o z d z i a ł 17

PRZEWODZENIE I PRZENIKANIE CIEPŁA

17.1. Prawo Fouriera

Ciepło jest przewodzone w kierunku największego spadku temperatury, a gęstość strumienia ciepła jest proporcjonalna do pochodnej w tym kierunku. Ponieważ pochodna w kierunku największego wzrostu jest gradientem $\text{grad } t = \nabla t$, więc wyrazem matematycznym prawa Fouriera jest równanie

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t. \quad (17.1)$$

Prawo Fouriera obowiązuje we wszystkich stanach skupienia, a w płynach również wtedy, gdy przewodzący płyn porusza się. Stosuje się ono zarówno dla ustalonego, jak i niustalonego przewodzenia ciepła. W pierwszym przypadku zarówno temperatura, jak i gęstość strumienia ciepła są funkcjami tylko współrzędnych, w drugim obie te wielkości zależą dodatkowo od czasu.

Współczynnik proporcjonalności λ w prawie Fouriera nosi nazwę **współczynnika przewodzenia ciepła** a jego jednostką w układzie jednostek SI jest 1 W/m deg , a w tradycyjnym układzie jednostek 1 kcal/m h deg . Jednostki te wiążą zależność

$$1 \text{ kcal/m h deg} = 1,163 \text{ W/m deg}. \quad (17.2)$$

Współczynnik przewodzenia ciepła nie jest wielkością stałą - zależy od temperatury, przy czym zależność ta ma dla różnych ciał różny charakter. Wpływ ciśnienia uwidacznia się jedynie dla gazów i jest on znacznie mniejszy od wpływu temperatury.

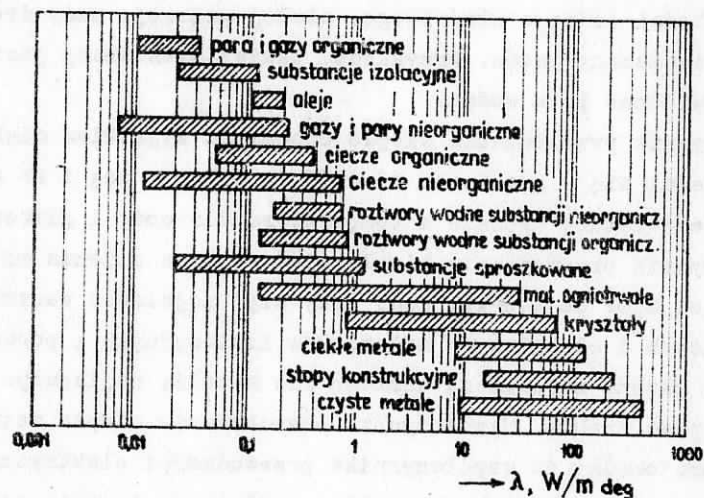
Dla gazów współczynnik przewodzenia ciepła mieści się w granicach od $0,005$ do $0,5 \text{ W/m deg}$ i rośnie ze wzrostem temperatury. Współczynnik przewodzenia ciepła mieszaniny gazów na ogół nie podlega prawu addytywności, tzn. nie stosuje się do równań podobnych do tych, jakie stosowaliśmy w rozdziale 7 do obliczania zastępczych wielkości (ciepła właściwego, stałej gazowej, masy drobinowej) dla mieszaniny gazów. Przykładem takiej mieszaniny jest powietrze zawilżone parą wodną.

Współczynnik przewodzenia ciepła cieczy (z wyjątkiem ciekłych metali) mieści się w granicach od $0,09$ do $0,7 \text{ W/m deg}$ i na ogół maleje z temperaturą (rośnie z temperaturą dla wody i gliceryny).

Współczynnik przewodzenia ciepła ciał stałych zmienia się w granicach od $0,02$ do 416 W/m deg , przy czym najniższe wartości ma dla porowatych i włóknistych materiałów izolacyjnych z porami wypełnionymi gazem, największą wartość dla metali; najlepszym przewodnikiem jest srebro. Współczynnik przewodzenia ciepła metali jest proporcjonalny do współczynnika przewodności elektrycznej i dla dobrych przewodników bardzo silnie zależy od stopnia czystości. Np. dla aluminium o stopniu czystości $99,75\%$ $\lambda = 229 \text{ W/m deg}$ (dla 0°C), a przy stopniu czystości $99,2\%$ $\lambda = 208 \text{ W/m deg}$. Domieszka 5% krzemu obniża wartość współczynnika przewodzenia ciepła aluminium do 140 W/m deg , a przy domieszce 10% magnezu $\lambda = 84 \text{ W/m deg}$, przy czym dla czystego magnezu $\lambda = 140 \text{ W/m deg}$. Współczynnik przewodzenia stopu metali może więc być (i często jest) niższy od współczynników dla poszczególnych składników. Powyższe spostrzeżenia skłaniają do zachowania ostrożności przy korzystaniu z danych tabelarycznych dotyczących współczynnika przewodzenia ciepła metali i ich stopów.

Dla materiałów porowatych, włóknistych i sypkich o porach wypełnionych gazem współczynnik przewodzenia ciepła jest tym bliższy dla tegoż gazu, im materiał jest bardziej porowaty, tzn. im większy jest udział przestrzeni wypełnionej gazem. Przestrzenie te nie mogą jednak mieć zbyt dużych wymiarów geometrycznych, gdyż wówczas wystąpią wewnątrz nich ruchy konwekcyjne intensyfikujące prze-

plyw ciepła. Ponieważ zwiększona porowatość materiału pociąga za sobą spadek jego gęstości, więc też w praktyce kojarzy się współczynnik przewodzenia ciepła materiału porowatego z jego gęstością.



Rys. 17.1. Zakresy wartości współczynnika przewodzenia ciepła

Współczynnik przewodzenia ciepła materiałów porowatych, włóknistych i sypkich rośnie ze wzrostem temperatury i to znacznie szybciej niż by to wynikało ze wzrostu współczynnika przewodzenia ciepła gazu wypełniającego pory. Przyczyną jest promieniowanie występujące między ściankami ograniczającymi przestrzenie gazowe. Ponieważ intensywność promieniowania zależy od czwartej potęgi temperatury bezwzględnej, więc wpływ temperatury na współczynnik przewodzenia ciepła jest szczególnie silny dla temperatur wysokich. W wyniku tego wiele materiałów izolacyjnych stosowanych w temperaturach niewiele odbiegających od temperatury otoczenia zupełnie nie spełnia swojej roli w temperaturach rzędu 1000°C.

Zestawienie zakresów wartości współczynników przewodzenia ciepła dla różnych grup substancji pokazano na rysunku 17.1. Wartości

liczbowe współczynników przewodzenia ciepła różnych substancji zestawiono w tablicy 10.

Sformułowane na początku niniejszego rozdziału prawo Fouriera (równ. (17.1)) jest słuszne przy założeniu, że impuls cieplny rozchodzi się z nieskończoną dużą prędkością, tzn. że zaburzenie pola temperatury w jednym punkcie ciała przewodzącego ciepło daje natychmiast znać o sobie we wszystkich jego punktach. Nie należy tu niewłaściwie kojarzyć faktu dotarcia impulsu do jakiegoś punktu z jego amplitudą - wskutek dużego oporu i dużej pojemności cieplnej ciała przewodzącego ciepło impuls ten jest w pierwszej chwili niesłychanie osłabiony.

Założenie nieskończoności dużej szybkości rozchodzenia się impulsu cieplnego jest w rzeczywistości dobrze spełnione, gdyż szybkość ta jest bardzo duża w stosunku do wymiarów ciał, w których rozpatrujemy przewodzenie ciepła (co najwyżej rzędu metrów) i czasów, w których badamy to zjawisko (sekundy, minuty, a nawet godziny i doby). Przykładowo dla aluminium prędkość ta wynosi $w_q = 3000$ m/s, a dla azotu w warunkach normalnych 150 m/s. Prędkość ta znacznie maleje przy niskich ciśnieniach i efekty związane ze skończoną szybkością rozchodzenia się impulsu cieplnego należy uwzględnić przede wszystkim w gazach silnie rozrzedzonych. Rozszerzone prawo Fouriera uwzględniające ten efekt ma postać

$$\bar{q} = -\lambda \nabla T - \tau_r \frac{\partial \bar{q}}{\partial t}, \quad (17.3)$$

gdzie tzw. czas relaksacji τ_r jest związany z prędkością rozchodzenia się zaburzeń cieplnych w_q następującą zależnością

$$w_q = \sqrt{\frac{\lambda}{c_p \rho \tau_r}}. \quad (17.4)$$

W zależności tej λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła, c_p ciepłem właściwym a ρ gęstością ciała przewodzącego ciepło.

17.2. Równania różniczkowe przewodzenia ciepła w ciałach stałych

Prawo Fouriera daje możliwość wyznaczenia strumienia ciepła, gdy znane jest pole temperatur. W praktyce najczęściej pole temperatur jest wielkością poszukiwaną, a danymi wyjściowymi są zjawiska zachodzące na brzegach ciała przewodzącego ciepło. Można się spodziewać, że dla wyznaczenia funkcji określającej rozkład temperatury w ciele przewodzącym ciepło konieczne będzie rozwiązanie równania różniczkowego. W celu uzyskania tego równania zastosujemy do zjawiska przewodzenia ciepła fundamentalne prawo termodynamiki - zasadę zachowania energii.

Sporządzimy bilans energii dla dowolnie wybranego skończonego elementu ciała przewodzącego ciepło zajmującego objętość V i posiadającego powierzchnię A . Strumień energii dostarczanej do tego elementu jest równy ciepłu przewodzonemu przez powierzchnię A . Przez element $d\vec{A}$ tej powierzchni przepływa elementarny strumień ciepła będący ujemnym iloczynem skalarowym wektora $d\vec{A}$ i wektora gęstości strumienia ciepła \vec{q} (por. równ. (16.2)). Znak minus wynika stąd, że ciepło dostarczone jest dodatnie wtedy, gdy wektor \vec{q} jest skierowany do powierzchni, a więc przeciwnie do wektora $d\vec{A}$. Ciepło przewodzone przez całą powierzchnię A jest sumą tych elementarnych strumieni ciepła (całką) rozciągniętą na całą powierzchnię

$$\text{dopływ energii} = - \oint_A \vec{q} \cdot d\vec{A}. \quad (a)$$

Ponadto do pozycji energii dostarczanej należy zaliczyć ciepło wydzielane wewnątrz układu w wyniku zachodzących wewnątrz tego ciała zjawisk egzotermicznych, np. przepływu prądu elektrycznego, egzotermicznych reakcji chemicznych. To wewnętrzne wydzielanie ciepła nazywamy wewnętrznym źródłem ciepła i charakteryzujemy je objętościową wydajnością \dot{q}_V wyrażającą strumień ciepła wydzielanego w wyniku działania źródła ciepła przypadający na jednostkę objętości. Jednostką miary tej wielkości w układzie SI jest W/m^3 . Wydajność objętościowa wewnętrznego źródła

dla ciepła może zależeć od współrzędnych a także od czasu. Może ona być również ujemna - ma to miejsce wtedy, gdy wewnątrz ciała przebiega reakcja endotermiczna. Strumień ciepła wydzielanego w wyniku działania źródła ciepła w elementarnej objętości dV wynosi $\dot{q}_V dV$, a w całej objętości V jest całką

$$\text{ciepło wydzielane przez źródło} = \int_V \dot{q}_V dV. \quad (b)$$

Przyrost energii wewnętrznej przypadający na jednostkę czasu (szybkość wzrostu energii wewnętrznej) wynosi dla elementarnej objętości dV

$$c(\partial t / \partial t) dm = c\rho(\partial t / \partial t) dV,$$

a dla całej objętości V jest całką

$$\text{szybkość wzrostu energii wewnętrznej} = \int_V c\rho \frac{\partial t}{\partial t} dV. \quad (c)$$

Na mocy pierwszej zasady termodynamiki szybkość wzrostu energii wewnętrznej elementu V musi być równa ciepłu przewodzonemu do tego elementu przez jego powierzchnię i ciepłu wydzielanemu przez wewnętrzne źródła ciepła. Kojarząc odpowiednio równania (a), (b) i (c) otrzymujemy

$$\int_V c\rho \frac{\partial t}{\partial t} dV = - \oint_A \vec{q} \cdot d\vec{A} + \int_V \dot{q}_V dV.$$

Po zastosowaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego do całki powierzchniowej mamy

$$\int_V c\rho \frac{\partial t}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \vec{q} \cdot dV + \int_V \dot{q}_V dV.$$

Przeniesienie wszystkich wyrażen na jedną stronę i zapis pod wspólną całką doprowadza do równania

$$\int_V (c\rho \frac{\partial t}{\partial t} + \nabla \vec{q} - \dot{q}_V) dV = 0.$$

Ponieważ równanie to ma być spełnione dla każdego dowolnie wybranego elementu V ciała przewodzącego ciepło, to funkcja podcałkowa musi być równa zeru, co jest spełnione wtedy, gdy

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\nabla \vec{q} + \dot{q}_v. \quad (17.5)$$

Kojarząc równanie (17.5) z prawem Fouriera (17.1) otrzymujemy równanie różniczkowe nieustalonego przewodzenia ciepła

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla (\lambda \nabla t) + \dot{q}_v, \quad (17.6)$$

przy czym $\nabla (\lambda \nabla t) = \text{div}(\lambda \text{grad } t)$. Jeżeli ciało stałe jest jednorodne (współczynnik przewodzenia ciepła λ nie zależy od współrzędnych) i izotropowe (λ nie zależy od kierunku), to po wprowadzeniu laplasjanu $\nabla^2 = \text{div grad}$ otrzymujemy

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \nabla^2 t + \dot{q}_v,$$

a po podzieleniu obustronnym przez $c\rho$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c\rho} \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{c\rho}. \quad (17.7)$$

Współczynnik przy laplasjanie temperatury

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (17.8)$$

jest nazywany współczynnikiem wyrównywania temperatury. Decyduje on o intensywności wyrównywania się temperatury przy nieustalonym przewodzeniu ciepła. Szybkość ta rośnie ze wzrostem przewodnictwa cieplnego (współczynnik λ), natomiast maleje ze wzrostem objętościowej pojemności cieplnej $c\rho$, gdyż w wyniku działania tej pojemności ciepło płynące w kierunku spadku temperatury (zależne właśnie od λ) jest

"po drodze" pochłaniane i to tym mocniej, im większe jest $c\rho$. Współczynnik wyrównywania temperatury ma wymiar m^2/s . Po wprowadzeniu w równaniu (17.7) oznaczenia (17.8) otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{c\rho}. \quad (17.9)$$

Otrzymane równanie różniczkowe nieustalonego przewodzenia ciepła jest z punktu widzenia matematycznego równaniem parabolicznym.

Gdyby równanie bilansu energii (17.5) skojarzyć z rozszerzonym prawem Fouriera (17.3), uwzględniającym skończoną szybkość rozchodzenia się impulsu cieplnego, to uzyskalibyśmy ogólniejsze równanie różniczkowe nieustalonego przewodzenia ciepła

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} = \frac{1}{c\rho} \nabla (\lambda \nabla t) + \frac{\dot{q}_v}{c\rho}. \quad (17.10)$$

Równanie to jest równaniem typu hiperbolicznego. Przy czasie relaksacji $\tau_r = 0$ (nieskończenie duża szybkość rozchodzenia się impulsu) przechodzi ono w równanie (17.7).

Równanie różniczkowe ustalonego przewodzenia ciepła uzyskujemy z równania nieustalonego przewodzenia ciepła przez wyzerowanie pochodnej podług czasu $\partial t / \partial \tau = 0$. W ogólnym przypadku, z równania (17.6) mamy

$$\nabla (\lambda \nabla t) + \dot{q}_v = 0, \quad (17.11)$$

a dla ciała jednorodnego i izotropowego

$$\nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0. \quad (17.12)$$

Równania (17.11) i (17.12) są równaniami eliptycznymi.

17.3. Warunki brzegowe

Wyznaczenie rozkładu temperatury w ciele przewodzącym ciepło w oparciu tylko o równanie różniczkowe nie jest możliwe. Nie jest nawet możliwe (z wyjątkiem przypadków jednowymiarowego przewodzenia ustalonego) wyznaczenie całki ogólnej równania różniczkowego przewodzenia ciepła. Dodatkowe dane niezbędne dla określenia pola temperatury, to warunki brzegowe informujące o warunkach wymiany ciepła na powierzchni ciała przewodzącego ciepło, a dla przewodzenia nieustalonego dodatkowo warunek początkowy określający rozkład temperatury w chwili początkowej. Równanie różniczkowe przewodzenia ciepła wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi stanowi tzw. zagadnienie brzegowe, którego rozwiązanie jest szukanym rozkładem temperatury.

17.3.1. Warunek brzegowy trzeciego rodzaju

Najczęstszym sposobem wymiany ciepła na powierzchni ciała przewodzącego ciepło jest **k o n w e k c y j n a** wymiana ciepła z przylegającym do powierzchni ciała (lub ją omywającym) płynem. Intensywność tej wymiany ciepła charakteryzuje **w s p ó ł c z y n - n i k w n i k a n i a c i e p ł a** (zwany też współczynnikiem przejmowania ciepła). Jest on współczynnikiem proporcjonalności pomiędzy różnicą temperatur powierzchni ciała stałego t i temperatury płynu t_0 , a gęstością strumienia ciepła \dot{q} wymienianego pomiędzy powierzchnią a płynem

$$\dot{q}_\alpha = \alpha (t - t_0). \quad (17.13)$$

Współczynnik wnikania ciepła α zależy od wielu czynników składających się na opis zjawiska konwekcji, a więc prędkości przepływu płynu, lepkości przewodnictwa cieplnego i ciepła właściwego płynu, zależy także od geometrii układu, w którym przebiega zjawisko konwekcji. Obliczaniem współczynnika wnikania ciepła zajmuje się dział wymiany ciepła zwany konweksją (rozdział 18). Jednostką współczynnika wnikania ciepła jest $W/m^2 \text{ deg}$, a w dawnym układzie

jednostek $kcal/m^2 h \text{ deg} = 1,163 W/m^2 \text{ deg}$. Konwekcyjny warunek brzegowy jest stwierdzeniem, że strumień ciepła przewodzonego od wnętrza ciała do jego powierzchni

$$\dot{q}_\lambda = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (17.14)$$

gdzie n jest normalną zewnętrzną do powierzchni ciała (a nie do powierzchni izotermicznych), jest równy strumieniowi ciepła oddawanego na drodze konwekcji od powierzchni do płynu

$$\dot{q}_\lambda = \dot{q}_\alpha.$$

Porównując równanie (17.13) i (17.14) otrzymujemy warunek brzegowy

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \alpha (t - t_0) \quad (17.15)$$

spełniony dla punktów leżących na powierzchni ciała przewodzącego ciepło. Z punktu widzenia matematycznego warunek ten polega na zadaniu na powierzchni liniowej kombinacji szukanej funkcji i jej pochodnej, a tego typu warunek nazywa się warunkiem brzegowym trzeciego rodzaju.

Warunek brzegowy (17.15) można sprowadzić do postaci bezwymiarowej. W tym celu należy obrać charakterystyczny rozmiar liniowy l_0 ciała przewodzącego ciepło - np. dla okrągłego pręta jego promień oraz pewną charakterystyczną różnicę temperatur Δt np. początkową. Jak widać z równania różniczkowego (17.9) i warunku brzegowego temperatura ciała przewodzącego ciepło i stała temperatura otoczenia tylko pozornie stanowią dwie zmienne - w rzeczywistości istotna jest tutaj tylko ich różnica $t - t_0$, tzn. nadwyżka temperatury ciała przewodzącego ciepło ponad temperaturą otoczenia. Dzieląc tę nadwyżkę przez charakterystyczną różnicę temperatur otrzymujemy zredukowaną temperaturę (zmienną bezwymiarową)

$$\vartheta = \frac{t - t_0}{\Delta t}. \quad (17.16)$$

W miejsce współrzędnej n (w kierunku normalnym do powierzchni) mierzonej w jednostkach długości pojawia się współrzędna zredukowana

$$N = \frac{n}{l_0} \quad (17.17)$$

powstała w wyniku dzielenia przez charakterystyczny rozmiar liniowy.

Dwa współczynniki tkwiące w warunku brzegowym wejdą w jedno bezwymiarowe kryterium

$$Bi = \frac{\alpha l_0}{\lambda} \quad (17.18)$$

zwane liczbą Biota i będące kryterium podobieństwa warunków brzegowych.

Bezwymiarowa postać warunku brzegowego (17.15) jest następująca

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial N} + Bi \vartheta = 0 \quad (17.19)$$

dla punktów leżących na powierzchni ciała.

17.3.2. Warunek brzegowy pierwszego rodzaju

Jeżeli na powierzchni ciała przewodzącego ciepło odbywa się bardzo intensywna konwekcyjna wymiana ciepła (duży współczynnik wnikania ciepła α), to różnica temperatur powierzchni ciała t i płynu t_0 będzie nieduża i praktycznie można przyjąć, że temperatura powierzchni równa się temperaturze płynu

$$t = t_0, \quad (17.20)$$

lub w postaci bezwymiarowej, przy użyciu zredukowanej temperatury (17.16)

$$\vartheta = 0. \quad (17.21)$$

Podobny efekt wystąpi wówczas, gdy przy umiarkowanym współczynniku wnikania ciepła na powierzchni będzie bardzo mały współczynnik przewodzenia ciepła ciała i duże jego rozmiary (duży wymiar charakterystyczny l_0). Wtedy wymiana ciepła drogą konwekcji na powierzchni ciała jest słabo kompensowana ciepłem dopływającym (lub odpływającym, przy grzaniu) do powierzchni ciała z jego wnętrza na drodze przewodzenia ciepła. Uwzględniając oba te czynniki możemy stwierdzić, że równość temperatury powierzchni i temperatury płynu wystąpi przy dużych liczbach Biota $Bi \gg 1$. Zapisując warunek brzegowy trzeciego rodzaju (17.19) w postaci

$$\frac{1}{Bi} \frac{\partial \vartheta}{\partial N} + \vartheta = 0$$

otrzymujemy w granicach, dla $Bi \rightarrow \infty$, równanie (21) będące bezwymiarową postacią warunku brzegowego pierwszego rodzaju.

17.3.3. Warunek brzegowy drugiego rodzaju

W przypadku, gdy powierzchnia ciała o temperaturze T wymienia ciepło z otoczeniem o temperaturze T_0 na drodze promieniowania, to strumień ciepła wymienianego jest proporcjonalny do różnicy czwartych potęg temperatur (rozdział 19). Gdy powierzchnia ciała otrzymuje ciepło drogą promieniowania ($T_0 > T$), to wówczas warunek brzegowy, będący również warunkiem równości strumieni ciepła po obu stronach powierzchni, ma postać

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = c(T_0^4 - T^4).$$

Jeżeli temperatura promieniującego otoczenia jest znacznie wyższa od temperatury powierzchni, $T_0 \gg T$, to tym bardziej $T_0^4 \gg T^4$ i można przyjąć

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = c T_0^4,$$

lub inaczej

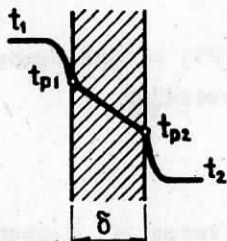
$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{c}{\lambda} T_0^4. \quad (17.22)$$

co oznacza, że na powierzchni ciała jest zadana pochodna temperatury.

17.4. Ustalone przewodzenie i przenikanie ciepła w przegrodach

17.4.1. Przegroda płaska

Płaska przegroda (płyta) oddziela dwa płyny o temperaturach t_1 i t_2 . Jeżeli temperatury każdego z płynów są wyrównane w objętości, a przegroda jest dostatecznie rozległa, to zagadnienie można traktować jak jednowymiarowe - temperatura jest funkcją tylko współrzędnej mierzonej wzdłuż osi prostopadłej do przegrody, a gęstość strumienia ciepła jest stała na całej powierzchni przegrody i wynosi \dot{q} . Rozkład temperatury w przegrodzie i przylegających do niej warstwach płynu pokazano na rysunku 17.2. Rozkład temperatury w przegrodzie wynika z całkowania jednowymiarowej postaci równania (17.11) bez wewnętrznych źródeł ciepła



Rys. 17.2. Rozkład temperatury w jednowarstwowej przegrodzie płaskiej

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dt}{dx} \right) = 0. \quad (17.23)$$

Jeżeli $\lambda = \text{idem}$, to wówczas

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0 \quad (17.24)$$

i rozkład temperatury jest liniowy

$$t = c_1 x + c_2. \quad (17.25)$$

Rozkład temperatury w warstwach przyściennych płynów nie jest istotny, jeżeli znamy współczynniki wnikania ciepła α_1 i α_2 po obu stronach przegrody. W celu wyznaczenia rozkładu temperatury w przegrodzie można by obliczyć stałe całkowania c_1 i c_2 w równa-

niu (17.25) rozpisując warunki brzegowe (17.15) dla obu powierzchni przegrody. Ponieważ jednak z rozkładu temperatur interesujące są tylko temperatury powierzchni t_{p1} i t_{p2} - można postąpić inaczej. Strumień ciepła o gęstości \dot{q} przepływający od płynu o temperaturze t_1 do płynu o temperaturze t_2 pokonuje na drodze przepływu trzy opory, połączone szeregowo. Pierwszy opór, to wnikanie ciepła na drodze konwekcji do powierzchni przegrody. Gęstość strumienia wnikającego określa równanie (17.13)

$$\dot{q} = \alpha_1 (t_1 - t_{p1}). \quad (17.26)$$

Wprowadzając pojęcie oporu cieplnego wnikania

$$R_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \quad (17.27)$$

możemy równanie (17.26) zapisać w sposób analogiczny do prawa Ohma

$$t_1 - t_{p1} = \dot{q} R_{\alpha 1}. \quad (17.28)$$

Ponieważ rozkład temperatury w przegrodzie jest liniowy, gradient temperatury można wyrazić ilorazem przyrostu temperatury w całej przegrodzie do jej grubości δ , a dalej na podstawie prawa Fouriera (17.1) napisać

$$\dot{q} = -\lambda \frac{dt}{dx} = \lambda \frac{t_{p1} - t_{p2}}{\delta}. \quad (17.29)$$

Wprowadzając pojęcie oporu cieplnego przewodzenia

$$R_{\lambda} = \frac{\delta}{\lambda} \quad (17.30)$$

możemy równaniu (17.29) również nadać postać analogiczną do prawa Ohma

$$t_{p1} - t_{p2} = \dot{q} R_{\lambda}. \quad (17.31)$$

Na trzecim etapie przepływu ciepła (od powierzchni do płynu 2) obowiązuje równanie podobne do (17.28)

$$t_{p2} - t_2 = \dot{q} R\alpha_2 \quad (17.32)$$

Sumując stronami równania (17.28), (17.31) i (17.32) otrzymujemy związek pomiędzy różnicą temperatur płynów $t_1 - t_2$ i gęstością strumienia ciepła przenikającego przez przegrodę

$$t_1 - t_2 = \dot{q}(R\alpha_1 + R_\lambda + R\alpha_2) = \dot{q} R \quad (17.33)$$

Suma oporów cieplnych wnikania i przewodzenia jest oporem przenikania ciepła przegrody, a jego odwrotność nazywa się współczynnikiem przenikania ciepła przegrody

$$k = \frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (17.34)$$

Po wprowadzeniu tego współczynnika związek (17.33) pomiędzy gęstością strumienia ciepła i różnicą temperatur płynów możemy zapisać w postaci

$$\dot{q} = k(t_1 - t_2) \quad (17.35)$$

Strumień ciepła \dot{Q} przepływający przez przegrodę o powierzchni A uzyskamy mnożąc \dot{q} przez A

$$\dot{Q} = kA(t_1 - t_2) \quad (17.36)$$

W celu znalezienia temperatur powierzchni przegrody t_{p1} i t_{p2} dla danych temperatur płynów i składowych oporów przenikania, należy ułożyć odpowiednie proporcje z równań (17.28), (17.32) i (17.33). I tak np. dla obliczenia temperatury t_{p1} dzielimy stronami równania (17.28) i (17.33), uzyskując

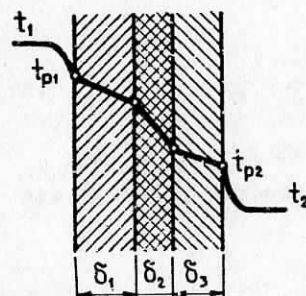
$$\frac{t_1 - t_{p1}}{t_1 - t_2} = \frac{R\alpha_1}{R} \quad (17.37)$$

a stąd

$$t_{p1} = t_1 - \frac{R\alpha_1}{R}(t_1 - t_2)$$

W przypadku przegrody wielowarstwowej (rys. 17.3) należy rozszerzyć równania (17.33) i (17.34) wprowadzając sumę oporów przewodzenia wszystkich warstw

$$k = \frac{1}{R} = \frac{1}{R\alpha_1 + \sum_{i=1}^n R_{\lambda i} + R\alpha_2} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (17.38)$$



Rys. 17.3. Rozkład temperatury w wielowarstwowej przegrodzie płaskiej

Również i sposób obliczania temperatury w dowolnym punkcie przegrody można uogólnić wyprowadzając w miejsce równania (17.37) równanie ogólniejsze

$$\frac{\Delta t_i}{\Delta t_j} = \frac{R_i}{R_j} \quad (17.39)$$

będące stwierdzeniem, że iloraz spadków temperatur na dwóch odcinkach przegrody (z włączeniem płynów) jest równy ilorazowi oporów przepływu ciepła na tych odcinkach.

Jeżeli współczynnik przewodzenia ciepła materiału przegrody zależy od temperatury, $\lambda = \lambda(t)$, to całkowanie równania (17.23) przebiega następująco

$$\frac{d}{dx}(\lambda(t) \frac{dt}{dx}) = 0$$

$$\lambda(t) \frac{dt}{dx} = c_1 = -\dot{q}$$

$$-\lambda(t)dt = \dot{q} dx$$

Wykonując całkowanie oznaczone w granicach grubości płyty

$$- \int_{t_{p1}}^{t_{p2}} \lambda(t) dt = \dot{q} \delta,$$

$$\dot{q} = \frac{1}{t_{p1} - t_{p2}} \int_{t_{p1}}^{t_{p2}} \lambda(t) dt \frac{t_{p1} - t_{p2}}{\delta}$$

i porównując z równaniem (17.29) dla $\lambda = \text{idem}$

$$\dot{q} = \lambda \frac{t_{p1} - t_{p2}}{\delta}$$

dochodzimy do wniosku, że przypadek $\lambda(t)$ można traktować jak $\lambda = \text{idem}$ stosując zastępczą wartość λ_m równą średniej całkowej w danym przedziale temperatur

$$\lambda_m = \frac{1}{t_{p1} - t_{p2}} \int_{t_{p1}}^{t_{p2}} \lambda(t) dt. \quad (17.40)$$

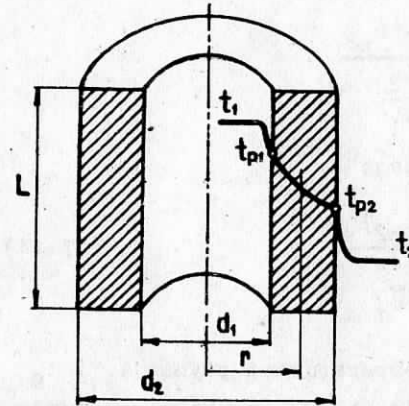
Dla liniowej zależności λ od temperatury średnia ta staje się średnią arytmetyczną wartości skrajnych.

17.4.2. Przegroda rurowa

Wewnątrz rury znajduje się płyn o temperaturze t_1 , zewnątrz płyn o temperaturze t_2 . Jeżeli temperatury płynów są wyrównane wzdłuż długości i obwodu rury, a rura jest dostatecznie długa, to zagadnienie jest zagadnieniem jednowymiarowym - temperatura jest funkcją tylko promienia. Profil temperatury w przegrodzie rurowej pokazano na rysunku 17.4. Ponieważ w miarę oddalania się od osi rury powierzchnia przez którą przepływa ten sam strumień ciepła \dot{Q} rośnie, więc gęstość strumienia ciepła maleje, a to pociąga za sobą spadek gradientu (pochodnej) temperatury - w myśl prawa Fouriera. Rozkład temperatury w przegrodzie nie jest zatem liniowy. Równanie ustalonego przewodzenia ciepła bez wewnętrznych

źródeł ciepła (17.11) w przypadku jednowymiarowego (osiowo symetrycznego) zagadnienia we współrzędnych walcowych ma postać

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dt}{dr} \right) = 0.$$



Rys. 17.4. Rozkład temperatury w jednowarstwowej przegrodzie rurowej

W równaniu tym uwzględniono również stałość współczynnika przewodzenia ciepła. W wyniku całkowania powyższego równania otrzymujemy całkę ogólną

$$t = C_1 \ln r + C_2$$

wskazującą, że profil temperatury jest logarytmiczny. Stałe C_1 i C_2 można wyznaczyć z warunków brzegowych

$$\text{dla } r = r_1 = \frac{d_1}{2} \quad t = t_{p1},$$

$$\text{dla } r = r_2 = \frac{d_2}{2} \quad t = t_{p2},$$

czyli

$$t_{p1} = C_1 \ln \frac{d_1}{2} + C_2, \quad (17.41)$$

$$t_{p2} = C_1 \ln \frac{d_2}{2} + C_2. \quad (17.42)$$

Dla celów praktycznych interesujące jest jednak nie równanie opisujące profil temperatury w przegrodzie, lecz związek strumienia ciepła przewodzonego przez przegrodę z temperaturami jej powierzchni. Dla uzyskania tego związku stosujemy prawo Fouriera dla powierzchni wewnętrznej rury o długości L , $A_1 = \pi d_1 L$

$$\dot{Q} = -\lambda \pi d_1 L \left(\frac{dt}{dr} \right)_{r = \frac{d_1}{2}} = -\lambda \pi d_1 L \frac{2C_1}{d_1}. \quad (17.43)$$

Odejmując stronami równania (17.41) i (17.42) otrzymujemy

$$t_{p1} - t_{p2} = C_1 \ln \frac{d_1}{d_2},$$

a stąd

$$C_1 = \frac{t_{p1} - t_{p2}}{\ln \frac{d_1}{d_2}}$$

co po wstawieniu do równania (17.43) daje

$$\dot{Q} = \frac{\pi L (t_{p1} - t_{p2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2}} \quad (17.44)$$

W celu wyznaczenia związku pomiędzy temperaturami płynów t_1 i t_2 a strumieniem ciepła postąpimy podobnie jak w przypadku przegrody płaskiej - wyznaczmy spadki temperatury na poszczególnych etapach przepływu ciepła i zsumujemy je. Dla wnikania od płynu oznaczonego indeksem 1 do ścianki rury

$$\dot{Q} = \pi d_1 L \alpha_1 (t_1 - t_{p1}),$$

a stąd

$$t_1 - t_{p1} = \frac{\dot{Q}}{\pi L \alpha_1 d_1} \quad (17.45)$$

Z równania (17.44) wynika, że dla przegrody

$$t_{p1} - t_{p2} = \frac{\dot{Q}}{\pi L} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2}, \quad (17.46)$$

a dla wnikania ciepła od powierzchni rury do płynu 2 mamy przez analogię do (17.45)

$$t_{p2} - t_2 = \frac{\dot{Q}}{\pi L} \frac{1}{\alpha_2 d_2} \quad (17.47)$$

Stosując równania (17.45) - (17.47) otrzymujemy poszukiwaną zależność

$$t_1 - t_2 = \frac{\dot{Q}}{\pi L} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right),$$

lub w innej postaci

$$\dot{Q} = \frac{\pi L (t_1 - t_2)}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_1}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} \quad (17.48)$$

Dla przegrody wielowarstwowej złożonej z n warstw w miejsce jednego równania (17.46) pojawi się n takich równań dla każdej warstwy, a po zsumowaniu i przekształceniu uzyskamy odpowiednik równania (17.48)

$$\dot{Q} = \frac{\pi L (t_1 - t_2)}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}, \quad (17.48a)$$

gdzie d_1 jest średnicą wewnętrzną, a d_{n+1} średnicą zewnętrzną wielowarstwowej przegrody rurowej.

Przez analogię do przegrody płaskiej można wprowadzić pojęcie oporów cieplnych przegrody rurowej: wnikania

$$R_{r\alpha} = \frac{1}{\alpha d} \quad (17.49)$$

i przewodzenia

$$R_{r\lambda i} = \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \quad (17.50)$$

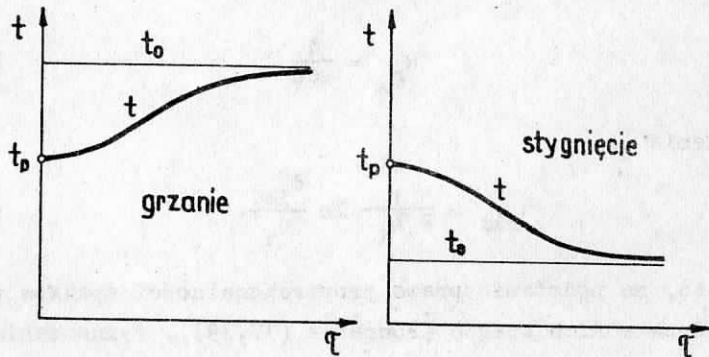
Umożliwia to, na podstawie prawa proporcjonalności spadków temperatur do odpowiednich oporów (równanie (17.39)), wyznaczanie temperatur w dowolnych miejscach przegrody wielowarstwowej.

17.5. Nieustalone przewodzenie ciepła

Nieustalone przewodzenie ciepła w ciałach stałych jest spowodowane zakłóceniem stanu równowagi, lub ustalonego przewodzenia ciepła. Zakłócenie to najczęściej polega na zmianie temperatury płynu przylegającego do rozpatrywanego ciała (na całej jego powierzchni lub na części powierzchni), ale może być także spowodowane przez zmianę intensywności wewnętrznego źródła ciepła. Zmiany te mogą przebiegać według różnych funkcji. Różnorodność sposobów zakłócania i różnorodność stanów początkowych sprawia, że nieustalone przewodzenie ciepła obejmuje bardzo szeroką klasę zagadnień.

17.5.1. Rozwiązanie ogólne problemu grzania i stygnięcia w środowisku o stałej temperaturze

Dla zilustrowania metod stosowanych w zagadnieniach nieustalonego przewodzenia ciepła rozpatrzmy problem, który można zaliczyć do jednego z podstawowych. Ciało stałe bez wewnętrznych źródeł ciepła było w równowadze cieplnej i posiadało wyrównaną w całym przekroju temperaturę t_p . W chwili zapoczątkowującej rozpatrywany proces ($\tau = 0$) ciało to zostało umieszczone w środowisku płynnym (ciekłym lub gazowym) o stałej temperaturze $t_0 \neq t_p$. Gdy $t_0 > t_p$ ciało stałe będzie w wyniku procesu nieustalonego przewodzenia ciepła nagrzewać się osiągając po czasie $\tau \rightarrow \infty$ nową temperaturę równowagi t_0 . Przy $t_0 < t_p$ nastąpi podobny proces stygnięcia ciała



Rys. 17.5. Nieustalone przewodzenie ciepła w środowisku o stałej temperaturze

stałego. Temperatura ciała stałego w czasie procesu jest funkcją czasu i współrzędnych, $t = t(\tau, x_1, x_2, x_3)$. Przebieg czasowy temperatury w jednym punkcie ciała stałego przedstawiono na rysunku 17.5.

Rozpatrywany proces nieustalonego przewodzenia ciepła, przy założeniu niezmienności właściwości fizycznych (λ, c, ρ) ciała stałego, podlega równaniu różniczkowemu (17.9), które przy niewystępowaniu wewnętrznych źródeł ciepła ma postać

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t. \quad (17.51)$$

Płyn otaczający ciało stałe wymienia z nim ciepło na drodze konwekcji, czemu odpowiada warunek brzegowy trzeciego rodzaju (równanie (17.15))

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \alpha (t - t_0), \quad \text{dla } x_1 \in A, \quad (17.52)$$

spełniony dla punktów na powierzchni ciała A. Warunek początkowy

$$t = t_p \quad \text{dla } \tau = 0 \quad (17.53)$$

jest stwierdzeniem, że w chwili początkowej dana jest temperatura ciała, wyrównana w całej jego objętości. Temperatura ciała zależy od zmiennych τ, x_1, x_2, x_3 oraz od parametrów występujących w równaniu różniczkowym i warunkach brzegowo-początkowych: $a, \lambda, \alpha, t_0, t_p, l_0$. Ostatnim parametrem jest charakterystyczny rozmiar liniowy l_0 . Nie występuje on w sposób jawny w przytoczonym wyżej opisie zagadnienia, gdyż opis ten ma charakter ogólny, nie nawiązujący do konkretnego kształtu ciała stałego. Wymiar ten pojawia się zwykle przy konkretyzacji zapisu $x_1 \in A$. Na przykład dla kuli warunek brzegowy (17.52) ma postać

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha (t - t_0) \quad \text{dla } x = r.$$

Wymiarem charakterystycznym jest więc w tym przypadku promień kuli $l_0 = r$.

Ponieważ zarówno równanie różniczkowe jak i warunki brzegowe są liniowe, nie jest istotne na jakim poziomie temperatur (tzn. od jakiej temperatury początkowej) będzie przebiegał proces przewodzenia ciepła. Można zatem operować nadwyżką temperatury ponad temperaturę początkową $t - t_p$, spełniającą następujący układ równań

$$\frac{\partial(t - t_p)}{\partial \tau} = a \nabla^2(t - t_p), \quad (17.51a)$$

$$-\lambda \frac{\partial(t - t_p)}{\partial n} = \alpha [t - t_p - (t_0 - t_p)] \quad \text{dla } x_i \in A, \quad (17.52a)$$

$$t - t_p = 0 \quad \text{dla } \tau = 0. \quad (17.53a)$$

Nadwyżka ta jest więc funkcją następujących zmiennych i parametrów

$$t - t_p = f(\tau, x_1, x_2, x_3, a, \lambda, \alpha, t_0 - t_p, l_0). \quad (17.54)$$

Ilość podstawowych jednostek, z których są zbudowane jednostki występujące w opisie powyższego problemu wynosi 4 (m, kg, s, deg) a więc ilość zmiennych bezwymiarowych powinna wynosić $10 - 4 = 6$. Są to następujące zmienne i parametry bezwymiarowe:

zredukowana temperatura

$$\Theta = \frac{t - t_p}{t_0 - t_p}, \quad (17.55)$$

zredukowane współrzędne

$$\xi_i = \frac{x_i}{l_0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (17.56)$$

$$N = \frac{n}{l_0}$$

(współrzędna w kierunku normalnym do powierzchni N nie jest zmienną niezależną - wyraża się przez ξ_1),

zredukowany czas - liczba Fouriera

$$Fo = \frac{a\tau}{l_0^2}, \quad (17.57)$$

liczba Biota

$$Bi = \frac{\alpha l_0}{\lambda}. \quad (17.58)$$

Wprowadzając zmienne bezwymiarowe (17.55) - (17.58) do równań (17.51a) - (17.53a) otrzymujemy

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \nabla^2 \Theta \quad (17.51b)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial N} + Bi(\Theta - 1) = 0 \quad \text{dla } \xi_i \in A. \quad (17.52b)$$

$$\Theta = 0 \quad \text{dla } Fo = 0. \quad (17.53b)$$

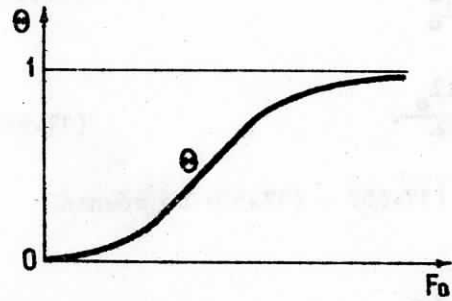
W miejsce (17.54) możemy zapisać

$$\Theta = \Theta(Fo, \xi_1, \xi_2, \xi_3, Bi) \quad (17.54a)$$

Dla określonego punktu ciała (ustalone ξ_i) i dla określonej liczby Biota zredukowana temperatura ciała zależy od liczby Fouriera, a jej przebieg, niezależnie od tego czy to jest grzanie, czy chłodzenie (rys. 17.5), jest taki sam i przedstawia go rysunek 17.6.

Zagadnienie brzegowe (17.51b) - (17.53b) można rozwiązywać różnymi sposobami. Najczęściej stosowanymi metodami, to metoda rozdzielania zmiennych i metoda transformacji całkowych, a w szczególności transformacji Laplace'a. Metoda rozdzielania zmiennych, historycznie najwcześniejsza, ma tę zaletę, że można ją stosować w ogólnej postaci bez wnikania w geometrię układu (kształtu ciała), a konkretyzację przeprowadzić już na końcowej postaci rozwiązania.

Metodę transformacji można stosować dla konkretnych kształtów ciała. Zalety tej metody są szczególnie widoczne w przypadku bardziej złożonych zakłóceń wymuszających proces nieustalonego przewodzenia ciepła.



Rys. 17.6. Zredukowana temperatura przy nieustalonym przewodzeniu ciepła w środowisku o stałej temperaturze

Przy stosowaniu metody rozdzielania zmiennych wygodniej jest operować funkcją ψ będącą dopełnieniem do 1 zredukowanej temperatury Θ

$$\psi = 1 - \Theta, \quad (17.59)$$

w celu ujednorodnienia warunku brzegowego (17.52b). Po wprowadzeniu (17.59) do równań (17.51b)-(17.53b) mamy

$$\frac{\partial \psi}{\partial Fo} = \nabla^2 \psi \quad (17.51c)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial N} + Bi \psi = 0 \quad \text{dla } \xi_1 \in A \quad (17.52c)$$

$$\psi = 1 \quad \text{dla } Fo = 0. \quad (17.53c)$$

Zakładamy, że szukaną funkcję ψ można przedstawić w postaci iloczynu funkcji czasu (liczby Fouriera) i funkcji współrzędnych

$$\psi(Fo, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varphi(Fo) \Lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (17.60)$$

Podstawiając to do równania różniczkowego (17.51c) otrzymujemy

$$v \frac{d\varphi}{d Fo} = \varphi \nabla^2 v,$$

lub po rozdzieleniu zmiennych

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d Fo} = \frac{\nabla^2 v}{v}.$$

Lewa strona równania może być co najwyżej funkcją czasu a prawa funkcją współrzędnych. Jeżeli jednak funkcje te mają być równe, to każda z nich musi być stałą, zależną co najwyżej od parametru Bi tkwiącego w warunku brzegowym. Stała ta musi być ujemna, by dla $Fo \rightarrow \infty \psi \rightarrow 0$, co gwarantowałoby $\Theta \rightarrow 1$ (rys. 17.6). Ostatecznie więc możemy zapisać

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d Fo} = \frac{\nabla^2 v}{v} = -\mu^2, \quad \mu = \mu(Bi)$$

Równanie to jest równoważne dwu równaniom

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d Fo} = -\mu^2, \quad (17.61)$$

$$\frac{\nabla^2 v}{v} = -\mu^2. \quad (17.62)$$

Rozwiązaniem równania (17.61) jest funkcja wykładnicza

$$\varphi = \exp(-\mu^2 Fo).$$

Równanie (17.62) zapiszemy w postaci

$$\nabla^2 v + \mu^2 v = 0 \quad (17.62a)$$

i dołączymy do niego warunek brzegowy

$$\frac{\partial v}{\partial N} + Bi v = 0 \quad \text{dla } \xi_1 \in A \quad (17.63)$$

powstały z podstawienia (17.60) do (17.52c) i podzielenia przez φ .

Zagadnienie brzegowe (17.62a) - (17.63) nosi nazwę zagadnienia Sturm-Liouville'a. Liczby μ oraz funkcje v będące rozwiązaniem tego zagadnienia noszą nazwę odpowiednio wartości własnych i funkcji własnych. Można wykazać, że wartości własne tworzą nieskończony (lecz przeliczalny) zbiór

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots,$$

a odpowiadający im układ funkcji własnych

$$v_1, v_2, v_3, \dots$$

jest układem ortogonalnym i zupełnym. Ortogonalność wyraża związek

$$\int_V v_i v_k dV = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq k \\ \|v_k\|^2 > 0 & \text{dla } i = k. \end{cases} \quad (17.64)$$

W równaniu (17.64) dV jest elementem objętości ciała (w układzie współrzędnych prostokątnych, prostoliniowych $dV = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$) a całkowanie jest rozciągnięte na całą objętość ciała. Symbol $\|v_k\|$ jest tzw. normą funkcji v_k .

Wracając do szukanej funkcji v^s (równanie (17.60)) stwierdzamy, że żaden z iloczynów $v_k \exp(-\mu_k^2 Fo)$ nie spełnia warunku początkowego (17.53c), gdyż żadna z funkcji własnych nie jest tożsamościowo równa 1. Wobec tego poszukujemy rozwiązania w postaci kombinacji liniowej rozwiązań zbudowanych z poszczególnych funkcji własnych, a więc w postaci szeregu

$$v^s = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \exp(-\mu_k^2 Fo).$$

Warunek początkowy (17.53c) wymaga, by

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Mnożąc powyższe równanie przez funkcję $v_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ i wykonując całkowanie w granicach całej objętości ciała otrzymujemy

$$\int_V v_j dV = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_V v_k v_j dV.$$

Po wykorzystaniu warunku ortogonalności (17.64) i po zamianie indeksów k, j otrzymujemy

$$A_k = \frac{\int_V v_k dV}{\int_V v_k^2 dV} = A_k(Bi). \quad (17.65)$$

Powracając do funkcji Θ (równ. (17.55), rys. 17.6) mamy

$$\Theta = \Theta(Fo, \xi_1, \xi_2, \xi_3, Bi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \exp(-\mu_k^2 Fo). \quad (17.66)$$

Zależność od liczby Biota jest ukryta w wartościach własnych μ_k , funkcjach własnych v_k oraz we współczynnikach szeregu A_k .

Niekiedy interesujący jest przebieg średniej temperatury ciała przewodzącego ciepło, będącej średnią całkową w całej objętości ciała

$$t_m = \frac{1}{V} \int_V t dV, \quad (17.67)$$

lub w postaci bezwymiarowej

$$\Theta_m = \frac{1}{V} \int_V \Theta dV. \quad (17.67a)$$

Oczywiste jest, że po wycałkowaniu współrzędnych

$$\Theta_m = \Theta_m(Fo, Bi).$$

Wykonując operacje przewidziane w definicji (17.67a) na równaniu (17.66) otrzymujemy (po zamianie kolejności całkowania i sumowania)

$$\Theta_m = 1 - \sum A_k \left(\frac{1}{V} \int_V v_k dV \right) \exp(-\mu_k^2 Fo).$$

Wprowadzając nowe współczynniki szeregu

$$B_k = A_k \frac{1}{V} \int_V v_k dV = \frac{(\int_V v_k dV)^2}{V \int_V v_k^2 dV} = B_k(Bi) \quad (17.68)$$

zależne od liczby Biota, mamy

$$\Theta_m = \Theta_m(Fo, Bi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \exp(-\mu_k^2 Fo). \quad (17.69)$$

Łatwo jest wykazać, że średnia zredukowana temperatura wyraża stopień nagrzania ciała zdefiniowany stosunkiem ciepła pochłoniętego (lub oddanego) w czasie τ , do ciepła pochłoniętego po całkowitym nagrzaniu się (lub ostygnięciu) do temperatury środowiska t_0 .

$$\mathcal{H} = \frac{Q(\tau)}{Q_{\max}} = \frac{\int_V c \rho (t - t_p) dV}{c \rho V (t - t_0)} = \frac{1}{V} \int_V \Theta dV = \Theta_m. \quad (17.70)$$

Wyrażenie pod całką w liczniku przedstawia ciepło dostarczone w czasie τ do elementu objętości dV , a całka sumę tych elementarnych ilości ciepła, dla całego ciała. Przy stygnięciu w liczniku i mianowniku zmieniają się znaki na przeciwne i całe wyrażenie pozostaje niezmienione.

17.5.2. Rozwiązania szczegółowe dla płyty, walca i kuli

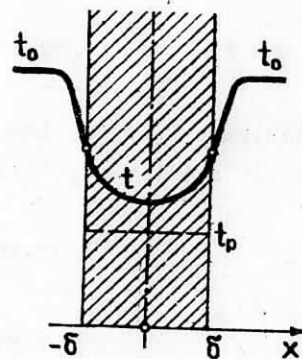
Rozległa p l y t a, której wymiary wzdłużne (długość i szerokość) są znacznie większe od grubości 2δ , może być traktowana jak płyta nieskończona. Jeżeli temperatura środowiska na całej powierzchni płyty jest taka sama, to zagadnienie można traktować jako jednowymiarowe $t = t(\tau, x)$. Rozpatrzmy przypadek symetrycznego nagrzewania płyty, to znaczy, gdy do obu jej powierzchni przylega płyn o tej samej temperaturze t_0 i gdy współczynniki wnikańia ciepła na obu powierzchniach są takie same i wynoszą α . Rozkład temperatur w pewnej chwili τ , dla przypadku grzania płyty

przedstawiono na rysunku 17.7. Dla tego zagadnienia operator Laplace'a ma postać

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

a dla zmiennych bezwymiarowych

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2},$$



Rys. 17.7. Rozkład temperatury przy grzaniu płyty

gdzie $\xi = x/\delta$ jest zredukowaną współrzędną, a $l_0 = \delta$ (połowa grubości płyty) rozmiarem charakterystycznym. Warunki brzegowe można zapisać dla obu powierzchni płyty w postaci

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha(t - t_0) \quad \text{dla } x = \delta,$$

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha(t - t_0) \quad \text{dla } x = -\delta.$$

Wynika z nich, że rozkład temperatury jest funkcją symetryczną (parzystą)

$$t(-x) = t(x),$$

a z tego, przy ciągłości profilu temperatury, wynika że

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } x = 0. \quad (17.71)$$

Sens fizyczny tego warunku jest oczywisty - przez powierzchnię środkową płyty nie przepływa żadne ciepło, a więc w myśl prawa Fouriera pochodna równa się zero. Do warunku (17.71) dołączamy już tylko jeden z warunków na powierzchni

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha(t - t_0) \quad \text{dla } x = \delta. \quad (17.72)$$

Bezwymiarowe równanie różniczkowe (17.51b) i warunki brzegowe (17.52b) mają więc dla płyty postać

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2}, \quad (17.73)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0 \quad \text{dla } \xi = 0, \quad (17.74)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + Bi(\Theta - 1) = 0 \quad \text{dla } \xi = 1, \quad (17.75)$$

warunek początkowy (17.53b) pozostaje niezmienny. Podobnie konkretyzuje się zapis zagadnienia Sturm-Liouville'a (17.62a), (17.63)

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \mu^2 v = 0 \quad (17.76)$$

$$\frac{dv}{d\xi} = 0 \quad \text{dla } \xi = 0 \quad (17.77)$$

$$\frac{dv}{d\xi} + Bi v = 0 \quad \text{dla } \xi = 1. \quad (17.78)$$

Z dwóch całek szczególnych $\cos \mu \xi$ i $\sin \mu \xi$ równania (17.76) tylko pierwsza spełnia warunek brzegowy (17.77). Łatwo zauważyć, że jeżeli funkcja v spełnia zagadnienie Sturm-Liouville'a (jest funkcją własną), to spełnia je również funkcja Cv , gdzie C jest dowolną stałą. Możemy więc w naszym przypadku przyjąć

$$v = \cos \mu \xi. \quad (17.79)$$

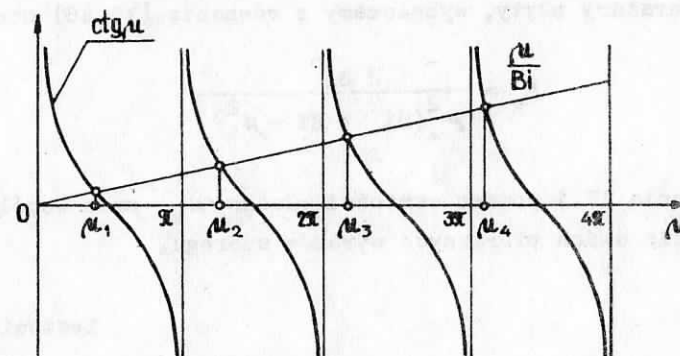
Z warunku brzegowego (17.78) po podstawieniu (17.79) otrzymujemy równanie przestępne

$$-\mu \sin \mu + Bi \cos \mu = 0,$$

lub w innej postaci

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{Bi} \mu. \quad (17.80)$$

Dodatnie pierwiastki tego równania są wartościami własnymi dla płyty. Graficzną interpretację rozwiązania równania (17.80) przedstawia rysunek 17.8. Ze zmianą liczby Biota zmienia się nachylenie linii prostej, a więc i punkty przecięcia tej linii z kotangensoidą. Wartości własne zależą więc od liczby Biota.



Rys. 17.8. Wartości własne dla płyty

Rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia (równ. (17.66)) ma w tym wypadku postać

$$\Theta = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \mu_k \xi \exp(-\mu_k^2 Fo). \quad (17.81)$$

Współczynniki A_k obliczamy z równania

$$A_k = \frac{\int_0^1 \cos \mu_k \xi \, d\xi}{\int_0^1 \cos^2 \mu_k \xi \, d\xi}$$

będącego konkretyzacją ogólnego równania (17.65) dla przypadku płyty. Po wykonaniu całkowania

$$A_k = \frac{2 \sin \mu_k}{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k}. \quad (17.82)$$

Wykorzystując równanie (17.80) można wyprowadzić inny wzór do obliczenia współczynników A_k

$$A_k = (-1)^{k+1} \frac{2 Bi \sqrt{Bi + \mu_k^2}}{\mu_k (Bi^2 + Bi + \mu_k^2)} \quad (17.82a)$$

Współczynniki B_k w równaniu (17.69), podającym przebieg średniej temperatury płyty, wyznaczamy z równania (17.68) otrzymując

$$B_k = \frac{2 Bi^2}{\mu_k^2 (Bi^2 + Bi + \mu_k^2)} \quad (17.83)$$

W zestawieniu 17.1 podano wartości własne μ_k oraz współczynniki A_k i B_k dla dwóch pierwszych wyrazów szeregu.

Zestawienie 17.1

Wartości własne μ_k i współczynniki A_k i B_k dla płyty

Bi	μ_1	μ_2	A_1	$-A_2$	B_1	B_2
1	2	3	4	5	6	7
0	0,0000	3,1416	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,3111	3,1731	1,0159	0,0197	1,0000	0,0002
0,2	0,4328	3,2039	1,0312	0,0381	0,9995	0,0007
0,3	0,5218	3,2341	1,0450	0,0555	0,9982	0,0016
0,4	0,5932	3,2636	1,0581	0,0719	0,9973	0,0027
0,5	0,6533	3,2923	1,0701	0,0873	0,9955	0,0040
0,6	0,7051	3,3204	1,0813	0,1025	0,9939	0,0054
0,7	0,7506	3,3477	1,0918	0,1154	0,9920	0,0070
0,8	0,7910	3,3744	1,1016	0,1282	0,9903	0,0088
0,9	0,8274	3,4003	1,1107	0,1403	0,9882	0,0105
1,0	0,8603	3,4256	1,1192	0,1517	0,9862	0,0124
2,0	1,0769	3,6436	1,1784	0,2367	0,9635	0,0313
3,0	1,1925	3,8088	1,2102	0,2881	0,9430	0,0468
4,0	1,2646	3,9352	1,2287	0,3215	0,9264	0,0582
5,0	1,3138	4,0336	1,2403	0,3442	0,9130	0,0664

cd. zest. 17.1

1	2	3	4	5	6	7
6,0	1,3496	4,1116	1,2478	0,3604	0,9021	0,0723
7,0	1,3766	4,1746	1,2532	0,3722	0,8932	0,0766
8,0	1,3978	4,2264	1,2569	0,3812	0,8859	0,0797
9,0	1,4149	4,2694	1,2598	0,3880	0,8796	0,0821
10,0	1,4289	3,4058	1,2612	0,3934	0,8743	0,0839
30,0	1,5202	4,5615	1,2717	0,4198	0,8354	0,0893
50,0	1,5400	4,6202	1,2727	0,4227	0,8260	0,0899
∞	1,5708	4,7124	1,2732	0,4244	0,8106	0,0901

Zredukowana temperatura θ jest funkcją ρ, ξ i Bi , a dla ustalonego ξ funkcją ρ i Bi . Dla celów praktycznych najbardziej interesujące są temperatury ekstremalne: w osi płyty ($\xi = 0$) i na jej powierzchni ($\xi = 1$). Przebieg zredukowanej temperatury θ w osi płyty przy różnych liczbach Biota pokazano na rysunku 17.9. Tą samą zależność dla powierzchni płyty przedstawia rysunek 17.10.

Dla długiego w a l c a otoczonego zewsząd płynem o temperaturze t_0 zmiana temperatury występuje tylko wzdłuż współrzędnej promieniowej. Wymiarem charakterystycznym jest promień walca $l_0 = r$.

Jednowymiarowy laplasjan we współrzędnych walcowych ma postać

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}$$

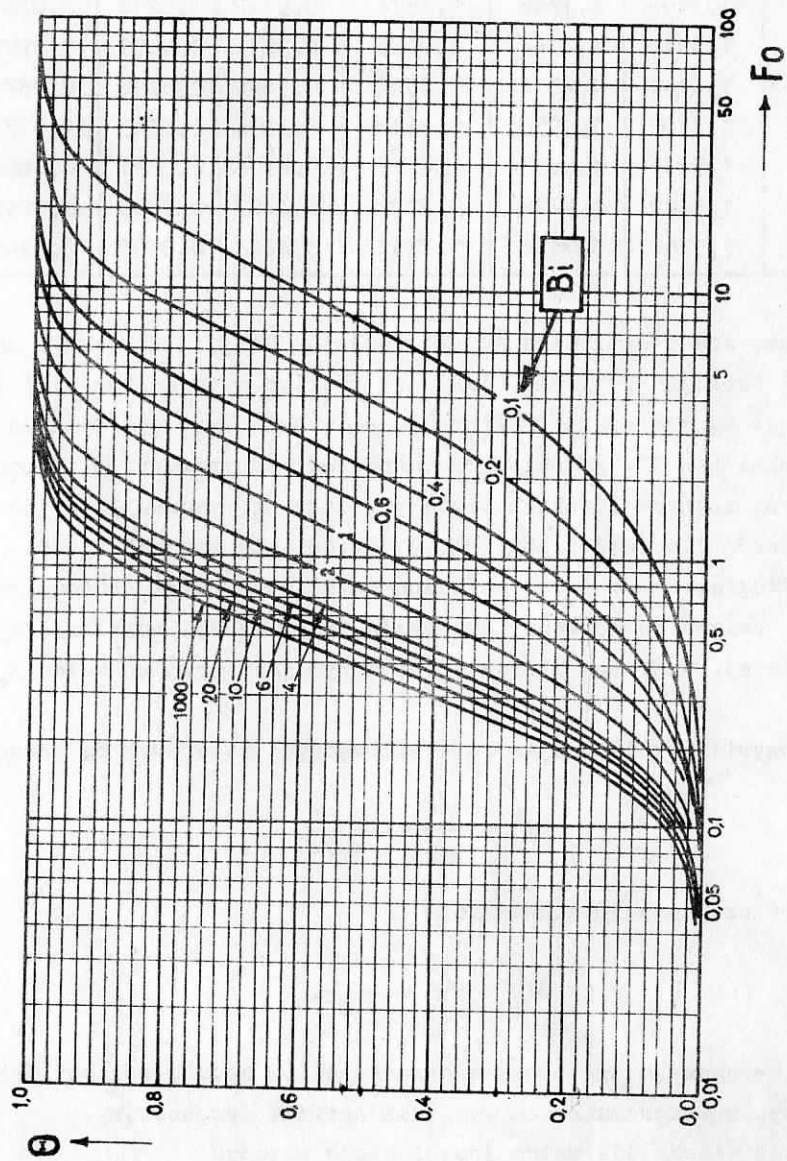
a we współrzędnych zredukowanych

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

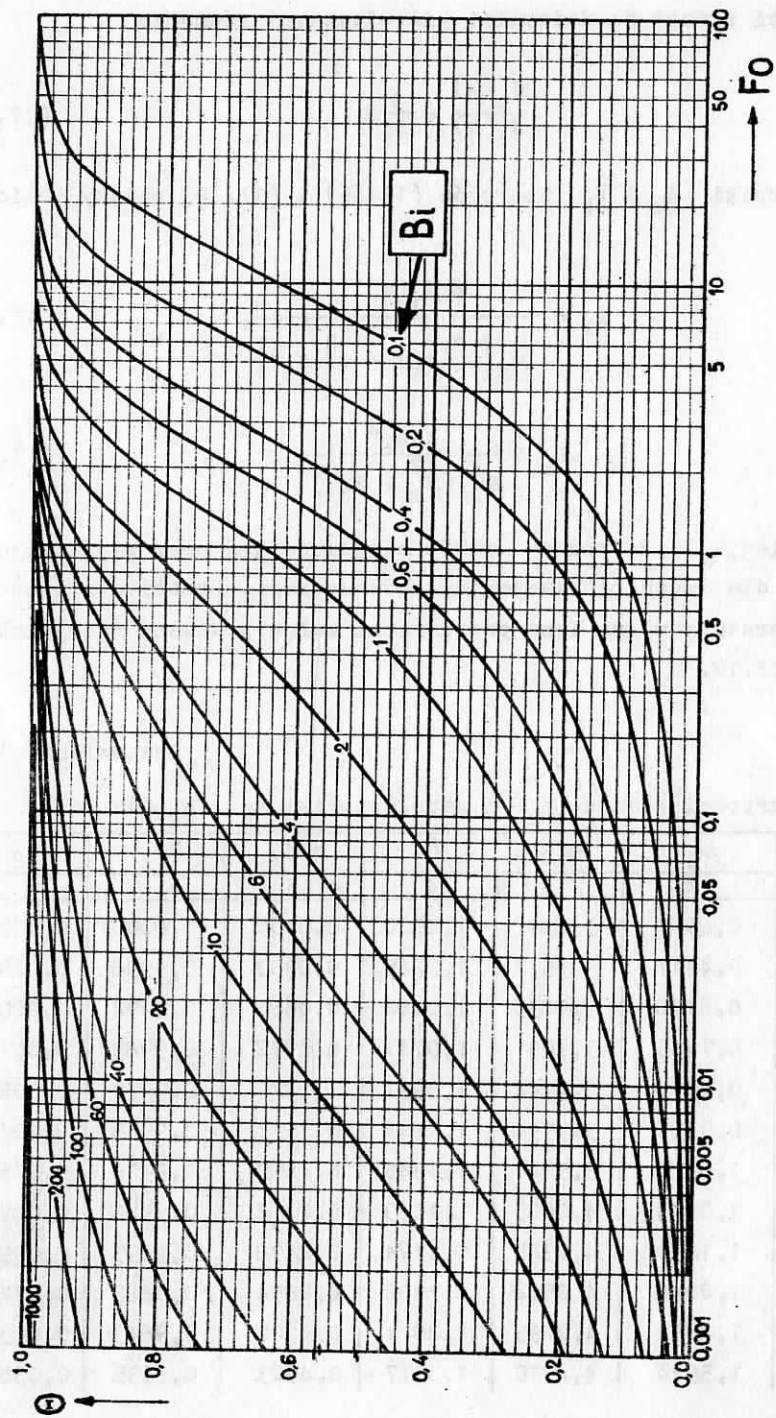
Warunki brzegowe można również przedstawić w sposób podobny jak dla płyty, z wykorzystaniem symetrii profilu temperatury.

Funkcją własną dla walca jest funkcja walcowa

$$v_k(\xi) = J_0(\mu_k \xi), \quad (17.84)$$



Rys. 17.9. Zredukowana temperatura w osi płyty



Rys. 17.10. Zredukowana temperatura na powierzchni płyty

a wartości własne są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{1}{Bi} \mu \quad (17.85)$$

Współczynniki A_k i B_k szeregów (17.66) i (17.69) należy obliczyć z równań

$$A_k = \frac{2 J_1(\mu_k)}{\mu_k [J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k)]} \quad (17.86)$$

$$B_k = \frac{4 Bi^2}{\mu_k^2 (\mu_k^2 + Bi^2)} \quad (17.87)$$

W zestawieniu 17.2 podano wartości własne μ_k oraz współczynniki A_k i B_k dla dwóch pierwszych wyrazów szeregu. Przebieg zredukowanej temperatury w osi i na powierzchni walca pokazano na rysunkach 17.11 i 17.12.

Zestawienie 17.2

Wartości własne μ_k i współczynniki A_k i B_k dla walca

Bi	μ_1	μ_2	A_1	$-A_2$	B_1	B_2
1	2	3	4	5	6	7
0,0	0,0000	3,8317	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,4417	3,8577	1,0245	0,0333	0,9998	0,0002
0,2	0,6170	3,8835	1,0482	0,0658	0,9992	0,0007
0,3	0,7465	3,9091	1,0711	0,0972	0,9983	0,0015
0,4	0,8516	3,9344	1,0931	0,1277	0,9970	0,0026
0,5	0,9408	3,9594	1,1142	0,1571	0,9955	0,0040
0,6	1,0184	3,9841	1,1345	0,1857	0,9936	0,0056
0,7	1,0873	4,0085	1,1539	0,2132	0,9916	0,0074
0,8	1,1490	4,0325	1,1724	0,2398	0,9893	0,0093
0,9	1,2048	4,0562	1,1902	0,2654	0,9868	0,0114
1,0	1,2558	4,0795	1,2071	0,2901	0,9843	0,0136
2,0	1,5994	4,2910	1,3377	0,4923	0,9535	0,0388

cd. zest. 17.2

1	2	3	4	5	6	7
3,0	1,7887	4,4634	1,4192	0,6309	0,9225	0,0625
4,0	1,9081	4,6018	1,4698	0,7278	0,8984	0,0813
5,0	1,9898	4,7131	1,5029	0,7973	0,8721	0,0953
6,0	2,0490	4,8033	1,5253	0,8484	0,8532	0,1957
7,0	2,0937	4,8772	1,5409	0,8869	0,8375	0,1132
8,0	2,1286	4,9384	1,5523	0,9225	0,8242	0,1187
9,0	2,1566	4,9897	1,5611	0,9393	0,8133	0,1229
10,0	2,1795	5,0332	1,5677	0,9575	0,8041	0,1260
30,0	2,3261	5,3410	1,5964	1,0488	0,7359	0,1289
50,0	2,3572	5,4112	1,5995	1,0587	0,7170	0,1309
∞	2,4048	5,5201	1,6021	1,0648	0,6917	0,1313

Dla kuli o promieniu $l_0 = r$ jednowymiarowy laplasjan ma postać

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \quad (17.88)$$

a we współrzędnych zredukowanych

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (17.88a)$$

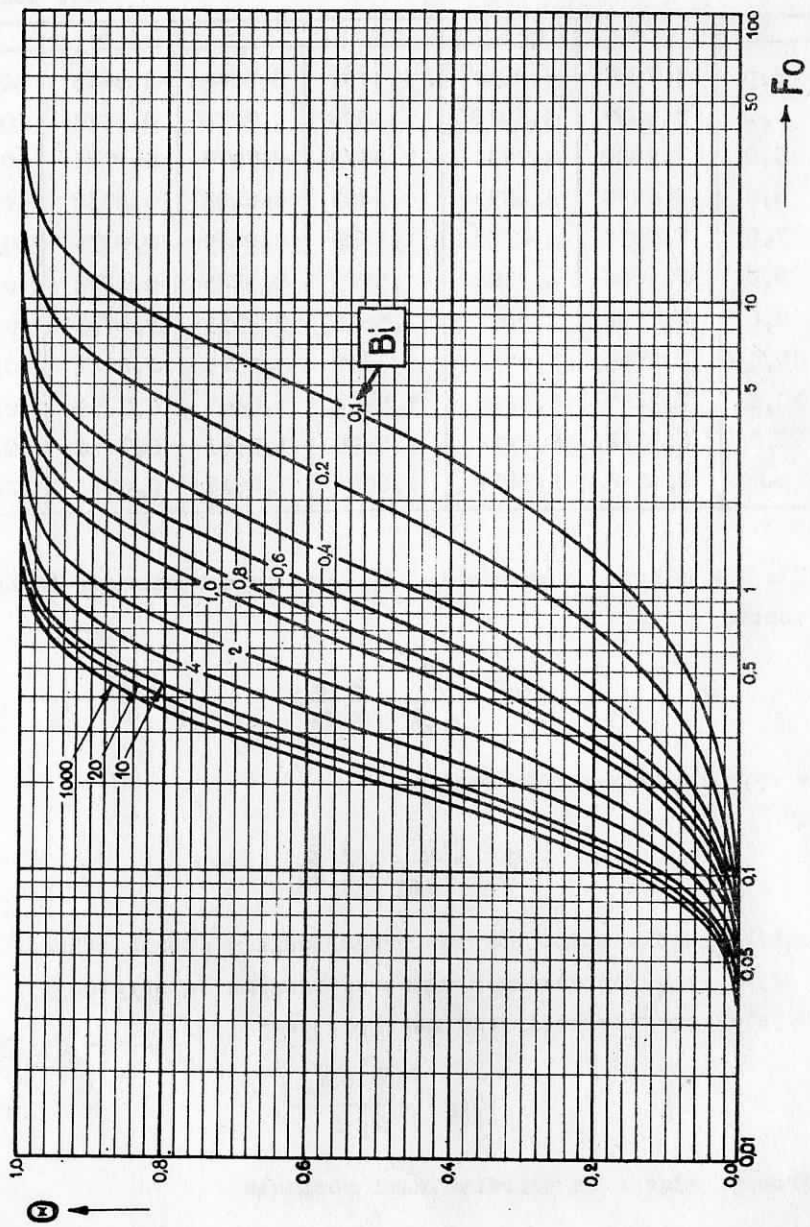
Warunki brzegowe można również przedstawić w sposób podobny jak dla płyty, z wykorzystaniem symetrii profilu temperatury.

Funkcja własna dla kuli jest następująca:

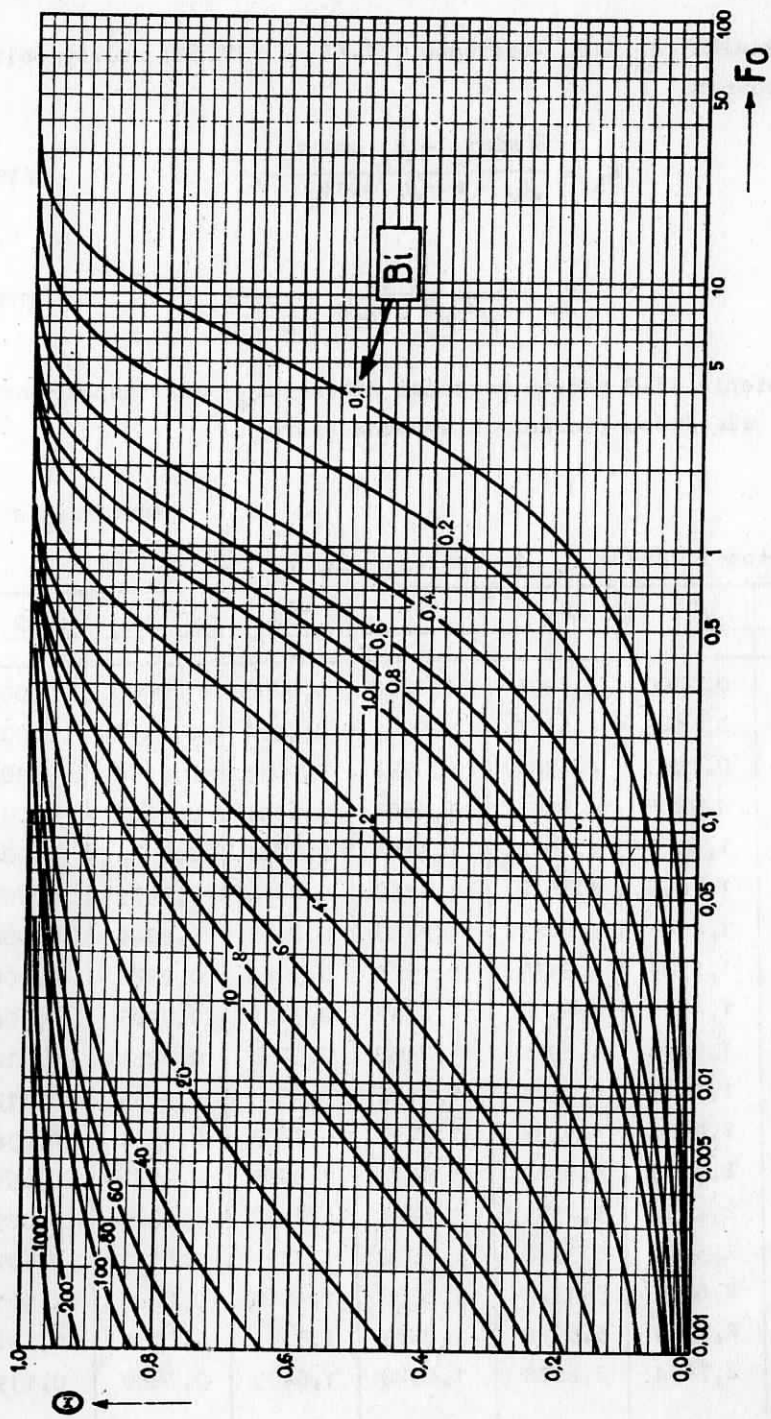
$$v_k(\xi) = \frac{\sin \mu_k \xi}{\mu_k \xi} \quad (17.89)$$

a wartości własne są pierwiastkami równania

$$\operatorname{tg} \mu = - \frac{\mu}{Bi - 1} \quad (17.90)$$



Rys. 17.11. Zredukowana temperatura w osi walca



Rys. 17.12. Zredukowana temperatura na powierzchni walca

Współczynniki A_k i B_k szeregów (17.66) i (17.69) należy obliczać z równań

$$A_k = \frac{2(\sin \mu_k - \mu_k \cos \mu_k)}{\mu_k - \sin \mu_k \cos \mu_k} \quad (17.91)$$

$$B_k = \frac{6 Bi^2}{\mu_k^2 (\mu_k^2 + Bi^2 - Bi)} \quad (17.92)$$

W zestawieniu 17.3 podano wartości własne μ_k oraz współczynniki A_k i B_k dla dwóch pierwszych wyrazów szeregu.

Zestawienie 17.3

Wartości własne μ_k i współczynniki A_k i B_k dla kuli

Bi	μ_1	μ_2	A_1	$-A_2$	B_1	B_2
1	2	3	4	5	6	7
0	0,0000	4,4934	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,5423	4,5157	1,0297	0,0454	0,9997	0,0001
0,2	0,7593	4,5379	1,0592	0,0894	0,9994	0,0006
0,3	0,9208	4,5601	1,0888	0,1345	0,9985	0,0013
0,4	1,0528	4,5822	1,1164	0,1781	0,9974	0,0022
0,5	1,1656	4,6042	1,1440	0,2216	0,9959	0,0034
0,6	1,2644	4,6261	1,1713	0,2633	0,9944	0,0048
0,7	1,3525	4,6479	1,1978	0,3048	0,9926	0,0064
0,8	1,4320	4,6696	1,2237	0,3455	0,9905	0,0081
0,9	1,5044	4,6911	1,2488	0,3854	0,9881	0,0101
1,0	1,5708	4,7124	1,2732	0,4244	0,9855	0,0122
2,0	2,0288	4,9132	1,4793	0,7673	0,9534	0,0380
3,0	2,2889	5,0870	1,6223	1,0288	0,9171	0,0655
4,0	2,4557	5,2329	1,7201	1,2253	0,8829	0,0890
5,0	2,5704	5,3540	1,7870	1,3733	0,8533	0,1075
6,0	2,6537	5,4544	1,8338	1,4860	0,8280	0,1215
7,0	2,7165	5,5378	1,8673	1,5731	0,8068	0,1319
8,0	2,7654	5,6078	1,8920	1,6409	0,7889	0,1396

cd. zest. 17.3

1	2	3	4	5	6	7
9,0	2,8044	5,5669	1,9106	1,6949	0,7737	0,1453
10,0	2,8363	5,7172	1,9249	1,7381	0,7667	0,1496
∞	3,1416	6,2832	2,0000	2,0000	0,6079	0,1520

Przebieg zredukowanej temperatury w środku kuli i na powierzchni kuli przedstawiono na rysunkach 17.13 i 17.14.

17.5.3. Zastosowanie transformacji Laplace'a

Zastosowanie transformacji Laplace'a do rozwiązywania zagadnień nieustalonego przewodzenia ciepła będzie pokazane na przykładzie płyty. Równanie różniczkowe i warunki brzegowe początkowe dla temperatury zredukowanej θ dla płyty podano wyżej (równania (17.73), (17.74), (17.75) i (17.53b)). Są to równania

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}$$

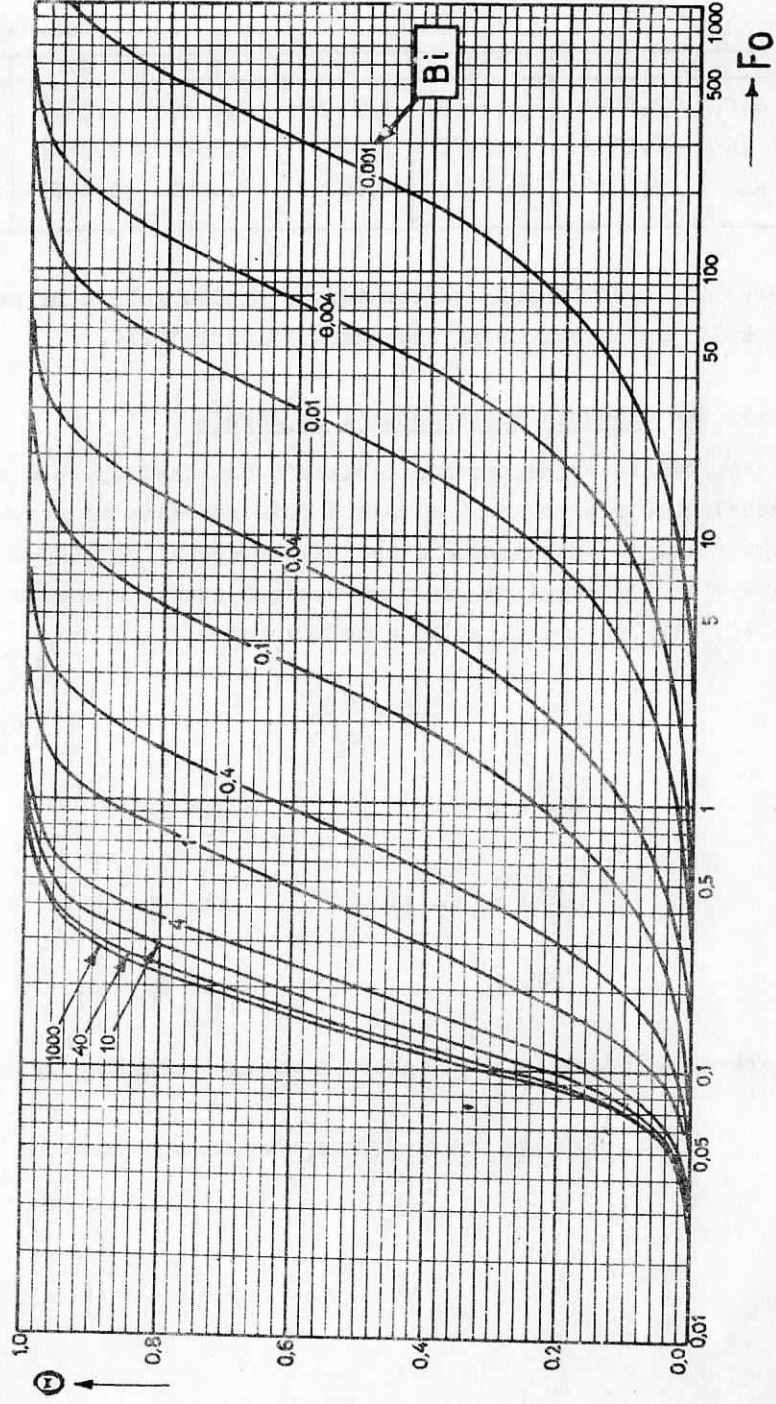
$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \quad \text{dla } \xi = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + Bi(\theta - 1) = 0 \quad \text{dla } \xi = 1$$

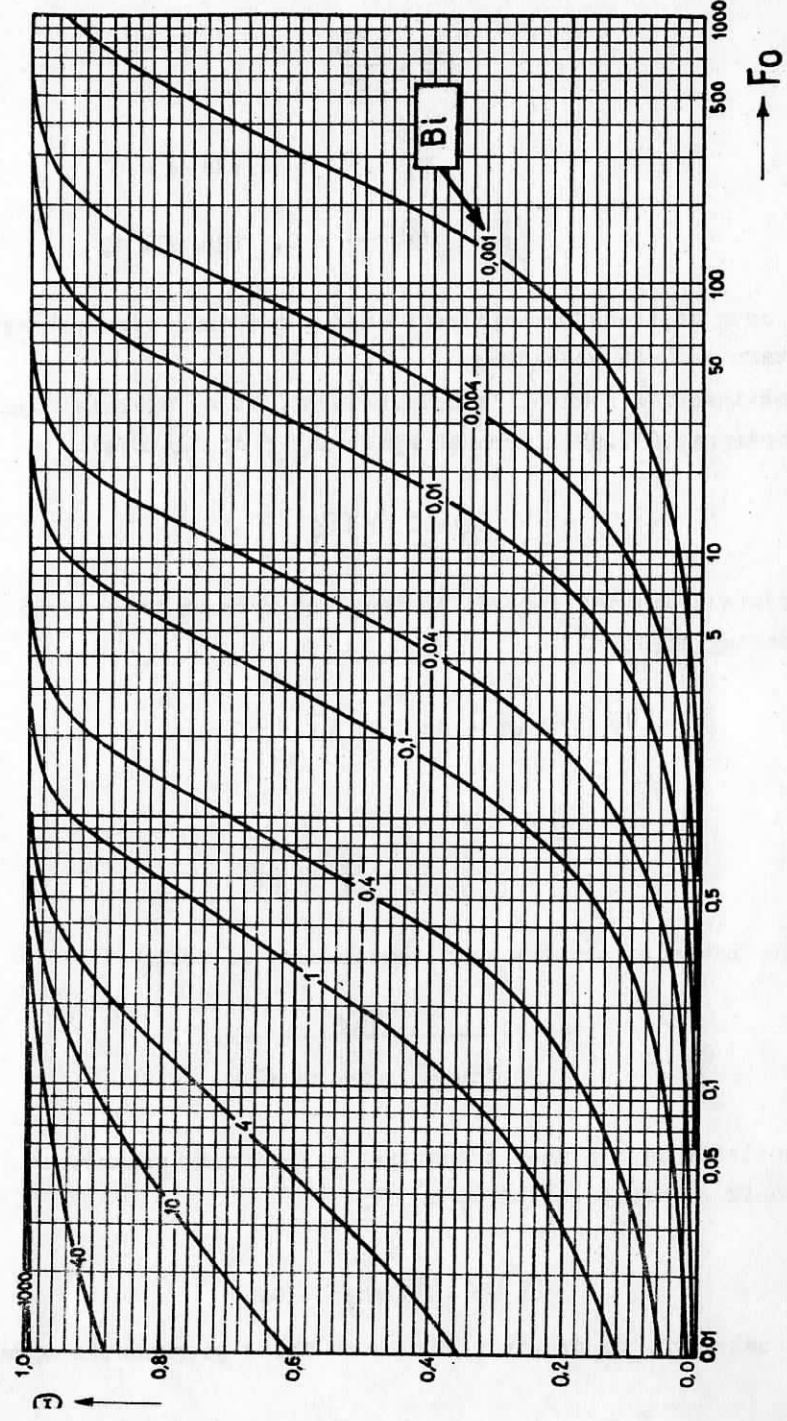
$$\theta = 0 \quad \text{dla } Fo = 0.$$

Transformując równanie różniczkowe i warunki brzegowe wg Laplace'a

$$\bar{\theta}(p, \xi) = L\theta = \int_0^\infty \theta(Fo, \xi) \exp(-p Fo) dFo \quad (17.93)$$



Rys. 17.13. Zredukowana temperatura w środku kuli



Rys. 17.14. Zredukowana temperatura na powierzchni kuli

otrzymujemy

$$p \bar{\theta} = \frac{d^2 \bar{\theta}}{d\xi^2} \quad (17.94)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\xi} = 0 \quad \text{dla } \xi = 0 \quad (17.95)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\xi} + \text{Bi}(\bar{\theta} - \frac{1}{p}) = 0, \quad \text{dla } \xi = 1, \quad (17.96)$$

przy czym do transformacji pochodnej w równaniu różniczkowym wykorzystano warunek początkowy

Rozwiązaniem równania różniczkowego (17.94) spełniającym warunek brzegowy (17.95) (warunek symetrii) jest funkcja

$$\bar{\theta} = C \text{ ch } \sqrt{p} \xi.$$

Po podstawieniu tej funkcji do drugiego warunku brzegowego (17.96) wyznaczamy stałą C

$$\sqrt{p} C \text{ sh } \sqrt{p} + \text{Bi}(C \text{ ch } \sqrt{p} - \frac{1}{p}) = 0,$$

$$C = \frac{1}{p(\text{ch } \sqrt{p} + \frac{\sqrt{p}}{\text{Bi}} \text{ sh } \sqrt{p})}.$$

Ostatecznie więc transformata temperatury ma postać

$$\bar{\theta} = \frac{\text{ch } \sqrt{p} \xi}{p(\text{ch } \sqrt{p} + \frac{\sqrt{p}}{\text{Bi}} \text{ sh } \sqrt{p})}. \quad (17.97)$$

Dla znalezienia biegunów transformaty wystarczy przyrównać do zera mianownik wyrażenia (17.97), co daje

$$\text{ch } \sqrt{p} + \frac{\sqrt{p}}{\text{Bi}} \text{ sh } \sqrt{p} = 0,$$

Łatwo zauważyć, że drugie równanie ma tylko pierwiastki ujemne.

Położmy więc

$$p = -\mu^2$$

czyli

$$\sqrt{p} = \mu i$$

W wyniku uzyskamy równanie

$$\cos \mu - \frac{\mu}{\text{Bi}} \sin \mu = 0$$

identyczne z równaniem (17.80). Biegunami transformaty $\bar{\theta}(p, \xi)$ są więc: $p_0 = 0$, $p_k = -\mu_k^2$ ($k = 1, 2, \dots$). Są to bieguny jednokrotne. Transformacja odwrotna może być zatem zapisana następująco

$$\begin{aligned} \theta(F_0, \xi) &= L^{-1} \bar{\theta} = L^{-1} \left[\frac{\text{ch } \sqrt{p} \xi}{p(\text{ch } \sqrt{p} + \frac{\sqrt{p}}{\text{Bi}} \text{ sh } \sqrt{p})} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \text{Res} \left\{ \frac{\text{ch } \sqrt{p} \xi}{\left[p(\text{ch } \sqrt{p} + \frac{\sqrt{p}}{\text{Bi}} \text{ sh } \sqrt{p}) \right]} \exp(p F_0) \right\}_{p=p_k}. \end{aligned}$$

Po wykonaniu działań otrzymujemy ostatecznie

$$\theta(F_0, \xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_k}{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k} \cos \mu_k \xi \exp(-\mu_k^2 F_0), \quad (17.98)$$

co jest oczywiście zgodne z wynikiem uzyskanym uprzednio metodą rozdzielania zmiennych.

17.5.4. Rozwiązanie przybliżone dla dużych liczb Fouriera

Szereg (17.66) będący ogólnym rozwiązaniem problemu niestabilnego przewodzenia ciepła w środowisku o stałej temperaturze jest szeregiem stosunkowo szybkozbieżnym. Dla spotykanych w praktyce przypadków wystarczy brać kilka pierwszych jego wyrazów. Zbieżność jest tym lepsza, im mniejsza jest liczba Biota i im większa jest liczba Fouriera. W wyrazach szeregu występuje czynnik $\exp(-\mu_k^2 Fo)$. Ponieważ wartości własne μ_k , jak widać z przykładu płyty (rys. 17.8), rosną podobnie do wyrazów ciągu arytmetycznego $k\pi$, więc czynnik ten szybko maleje ze wzrostem k i to tym szybciej, im większa jest liczba Fouriera. Dla dużych liczby Fouriera wystarczy poprzestać na pierwszym wyrazie

$$\Theta \approx 1 - A_1 v_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (17.99)$$

Wartość liczby Fouriera, od której począwszy można stosować przybliżenie (17.99) zależy od liczby Biota (dla małych liczb Biota jest mniejsza), a także od przyjętej dokładności obliczeń.

17.5.5. Rozwiązanie przybliżone dla małych liczb Biota

Podstawowym założeniem w tym rozwiązaniu jest wyrównanie temperatury w całej objętości ciała, w każdej chwili czasu. Założenie to będzie dobrze spełnione, gdy ciało stałe będzie doskonałym przewodnikiem ($\lambda \rightarrow \infty$), ale również gdy będzie ono bardzo cienkie ($l_0 \rightarrow 0$) przy umiarkowanym λ . Możliwość wyrównywania się temperatury w ciele stałym w każdej chwili jest zapewniona również wtedy, gdy odbieranie (lub dostarczanie) ciepła na powierzchni jest bardzo mało intensywne, co ma miejsce wówczas, gdy mały jest współczynnik wnikania ciepła α . Rozpatrując te trzy czynniki łącznie możemy stwierdzić, że temperatura w przekroju ciała stałego będzie w każdej chwili wyrównana wtedy, gdy

$$Bi = \frac{\alpha l_0}{\lambda} \rightarrow 0, \quad (17.100)$$

a więc dla bardzo małych liczb Biota.

Jeżeli temperatura w przekroju ciała jest wyrównana i wynosi t , to jego energia wewnętrzna ma wartość $U = V c \varrho t$, a jej zmiana w czasie $d\tau$

$$dU = V c \varrho dt$$

(V jest objętością ciała). Zmiana energii wewnętrznej równa się ciepłu dostarczonemu w czasie $d\tau$ do ciała na drodze konwekcji przez powierzchnię A , od płynu o temperaturze t_0 , w którym jest zanurzone ciało przewodzące ciepło. Z warunku tego otrzymujemy równanie różniczkowe

$$V c \varrho dt = A \alpha (t_0 - t) d\tau. \quad (17.101)$$

Równaniu temu towarzyszy warunek początkowy

$$t = t_p \quad \text{dla} \quad \tau = 0 \quad (17.102)$$

będący stwierdzeniem, że w chwili początkowej temperatura wynosiła t_p . Równanie (17.101) można zapisać następująco

$$d\left(\frac{t - t_p}{t_0 - t_p}\right) = \frac{A l_0}{V} \frac{\alpha l_0}{\lambda} \left(1 - \frac{t - t_p}{t_0 - t_p}\right) d\left(\frac{\lambda \tau}{c \varrho l_0^2}\right),$$

gdzie λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła stałego, l_0 jego charakterystycznym rozmiarem liniowym.

Wprowadzamy jak poprzednio zmienne bezwymiarowe: zredukowaną temperaturę Θ (równ. (17.55)), liczbę Fouriera (równ. (17.57)), przy czym $a = \lambda/c \varrho$, liczbę Biota (równ. (17.58)) oraz dodatkowo kryterium kształtu

$$K = \frac{A l_0}{V} \quad (17.103)$$

Kryterium K informuje jak dalece jest rozwinięta powierzchnia ciała. Wynosi ono dla płyty $K = 1$ ($l_0 = \delta$ - połowa grubości płyty), dla walca $K = 2$ ($l_0 = r$ - promień), dla kuli $K = 3$ ($l_0 = r$ - promień).

Bezwymiarowa postać równania różniczkowego (17.101) jest następująca:

$$\frac{1}{K Bi} \frac{d\theta}{d Fo} + \theta = 1, \quad (17.101a)$$

a towarzyszącego mu warunku początkowego

$$\theta = 0 \quad \text{dla} \quad Fo = 0. \quad (17.102a)$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (17.101a) przy warunku początkowym (17.102a) jest następujące

$$\theta = 1 - \exp(-K Bi Fo). \quad (17.104)$$

Funkcję tę, opisującą przebieg temperatury ciała przy małych liczbach Biota, uzyskaliśmy z bezpośredniej analizy tego przypadku. Równanie (17.104) można również uzyskać z rozwiązania ścisłego (17.66) przez znalezienie jego postaci asymptotycznej dla małych Biotów, tzn. z warunku

$$\lim_{Bi \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-K Bi Fo)}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k \exp(-\mu_k^2 Fo)} = 1. \quad (17.105)$$

R o z d z i a ł 18

KONWEKCYJNA WYMIANA CIEPŁA

18.1. Podstawowe zależności i metody badań

Jak już podano w rozdziale 16 konwekcja polega na przewodzeniu ciepła w poruszającym się płynie, przy czym zjawisko to jest interesujące o tyle, o ile towarzyszy mu wymiana ciepła pomiędzy powierzchnią omywaną przez płyn a płynem. Z tego też względu charakteryzujemy konwekcję za pomocą tzw. w s p ó ł c z y n n i k a w n i k a n i a c i e p ł a określającego globalny efekt tego zjawiska, tzn. związek pomiędzy gęstością strumienia ciepła \dot{q} wymienianego na drodze konwekcji pomiędzy powierzchnią ciała stałego i płynem a różnicą temperatur powierzchni t_p i płynu t

$$\dot{q} = \alpha(t_p - t). \quad (18.1)$$

Wniknięcie w mechanizm zjawiska konwekcji jest niezbędne przy wyznaczaniu współczynnika wnikania ciepła, w szczególności gdy szukamy go na drodze analitycznej. Droga do analitycznego obliczenia współczynnika wnikania ciepła prowadzi bowiem przez wyznaczenie pola temperatury w płynie omywającym powierzchnię ciała stałego $t(x_1, x_2, x_3, \tau)$. Obliczając gęstość strumienia ciepła \dot{q} wymienianego przez płyn ze ścianką z prawa Fouriera (dla płynu) otrzymujemy

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial t(x_1, \tau)}{\partial n}, \quad \text{dla} \quad x_1 \in A, \quad (18.2)$$

gdzie n jest normalną do powierzchni A rozdzielającej płyn i ciało stałe, skierowaną na zewnątrz płynu, a λ jest współczynni-

kiem przewodzenia ciepła płynu. Porównując równania (18.1) i (18.2) otrzymujemy współczynnik wnikania ciepła

$$\alpha = - \frac{\lambda \frac{\partial t}{\partial n}}{t_p - t}. \quad (18.3)$$

Wobec zmienności temperatury płynu wyjaśnienie wymaga temperatura t w równaniu (18.1), tkwiąca również w mianowniku równania (18.3). Gdy objętość płynu przylegającego do powierzchni jest ograniczona, a praktycznie nieduża - np. płyn płynący wewnątrz rurociągu, to temperatura ta jest **s r e d n i ą** temperaturą płynu (np. w rurze - średnią w przekroju rury przynależnym do miejsca, w którym określamy współczynnik wnikania ciepła). Gdy objętość płynu przylegającego do powierzchni jest nieograniczona, a praktycznie bardzo duża, temperatura t jest temperaturą płynu w dużej odległości od powierzchni.

Wyznaczenie pola temperatury jest nierozłącznie związane z wyznaczeniem pola prędkości w płynie. Funkcje te uzyskuje się z rozwiązania układu równań różniczkowych: równania ciągłości (13.10)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{w}) = 0, \quad (18.4)$$

równania ruchu (13.25)

$$\rho \frac{D\vec{w}}{Dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{w} + \rho \vec{g}. \quad (18.5)$$

równania przewodzenia ciepła

$$\frac{Dt}{Dt} = a \nabla^2 t, \quad (18.6)$$

do których są dołączone równania stanu (termiczne i kaloryczne) oraz warunki brzegowo-początkowe. Warunek brzegowy dla prędkości jest stwierdzeniem, że na powierzchni ciała stałego prędkość $w = 0$, a warunek brzegowy dla temperatury wyraża równość temperatury ścianki i płynu na ich styku. Równanie przewodzenia ciepła w poru-

szającym się płynie (18.6) tym się różni od równania (17.9) dotyczącego ciała stałego, że lokalną pochodną $\partial t / \partial t$ zastępuje pochodna substancjalna Dt / Dt . Współczynnik wyrównywania temperatury dla gazu

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho}. \quad (18.7)$$

Z wielkości zawartych w równaniach (18.3) i (18.6) oraz w towarzyszących im warunkach brzegowo-początkowych można utworzyć zmienne bezwymiarowe opisujące zjawisko konwekcji. Bezwymiarową postacią wielkości szukanej, tzn. współczynnika wnikania ciepła jest liczba Nusselta

$$Nu = \frac{\alpha l_0}{\lambda}, \quad (18.8)$$

gdzie l_0 jest charakterystycznym rozmiarem liniowym związanym z przepływem płynu (np. dla rury jej średnica, a nie długość). Współczynnik przewodzenia ciepła w mianowniku liczby Nusselta dotyczy płynu i tym liczba ta różni się od liczby Biota (dla której dotyczył on ścianki).

Liczba Reynoldsa

$$Re = \frac{w l_0}{\nu} = \frac{\rho w l_0}{\eta} \quad (18.9)$$

decyduje o charakterze przepływu i dlatego też ma zasadniczy wpływ na liczbę Nusselta.

Liczba Prandtla

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta c_p}{\lambda} \quad (18.10)$$

dotyczy wyłącznie właściwości płynu i jest ilorazem dwóch wielkości odpowiedzialnych za dwa zjawiska nieodwracalne zachodzące przy konwekcji: wyrównywanie się prędkości wskutek lepkości (tarcia) i wyrównywania się temperatur wskutek przewodzenia ciepła. Dla gazów,

które można traktować jak doskonałe liczby Prandtla zależy tylko od ilości atomów w cząsteczce, nie zależy natomiast od parametrów. Dla gazów jednoatomowych $Pr = 0,67$, dwuatomowych $Pr = 0,72$, trójatomowych $Pr = 0,80$, a dla gazów cztero- i więcej atomowych $Pr = 1$. Liczba Prandtla cieczy jest większa niż dla gazów (jej wartości mieszczą się w granicach od kilku do kilkuset) i zmienia się dość znacznie z temperaturą, przy czym jest to spowodowane głównie zależnością dynamicznego współczynnika lepkości η od temperatury. Dla wody na linii nasycenia liczba Prandtla silnie maleje w zakresie temperatur od $0+180^{\circ}\text{C}$ (od $13,7+1$), dla wyższych temperatur zmienia się nieznacznie. Odmiennie zachowują się jedynie ciekłe metale, dla których $Pr = 0,005 \div 0,05$.

Niekiedy zamiast liczby Prandtla używa się liczby Pecleta będącej iloczynem liczby Prandtla i liczby Reynoldsa

$$Pe = \frac{w l_0}{a} = Re Pr. \quad (18.11)$$

W przypadku, gdy na ruch płynu mają wpływ siły masowe związane z polem sił o przyspieszeniu g (np. pole grawitacyjne), w opisie zjawiska konwekcji uczestniczy liczba Grashofa

$$Gr = \frac{g\beta\Delta t l_0^3}{\nu^2}, \quad (18.12)$$

gdzie β jest współczynnikiem rozszerzalności objętościowej płynu, a Δt różnicą temperatur ścianki i płynu.

Dla przepływów nieustalonych w opisie zjawiska pojawia się czas, którego bezwymiarową postacią jest liczba Fouriera

$$Fo = \frac{a\tau}{l_0}. \quad (18.13)$$

Ponadto stosunki wymiarów geometrycznych tworzą kryteria podobieństwa geometrycznego K_1 .

Ostatecznie dla konwekcji u s t a l o n e j możemy zanotować istnienie następującej zależności bezwymiarowej

$$Nu = f(Re, Pr, Gr, K_1). \quad (18.14)$$

W zależności od przyczyn wprawiających w ruch płyn omywający powierzchnię ciała stałego konwekcję dzielimy na wymuszoną i swobodną. Przy konwekcji w y m u s z o n e j prędkość przepływu płynu jest narzucona przez zewnętrzne wymuszenie (np. przepływ cieczy w rurze - przez pompę). Siły masowe mają wówczas znikomy wpływ na ruch płynu i można je pominąć, czego wyrazem jest zależność

$$Nu = f(Re, Pr, K_1). \quad (18.15)$$

Przy konwekcji s w o b o d n e j brak jest zewnętrznych wymuszeń. Natomiast zróżnicowanie gęstości płynu wynikłe z nierównomierności pola temperatury powoduje w polu sił grawitacyjnych lub innych sił masowych ruch płynu (wypór). O przebiegu zjawiska decyduje wówczas liczba Grashofa, obok liczby Prandtla i kryteriów podobieństwa geometrycznego

$$Nu = f(Gr, Pr, K_1). \quad (18.16)$$

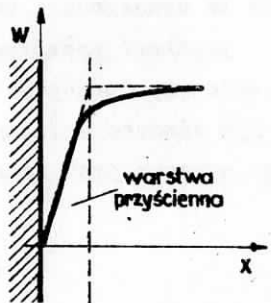
Ponieważ istnieje pole prędkości, można określić liczbę Reynoldsa, jest ona jednak podobnie jak liczba Nusselta, funkcją liczby Grashofa.

Nie można oczywiście wykluczyć przypadków, w których oba czynniki wywołujące ruch płynu, tzn. zewnętrzne wymuszenie i siły wyporu, mają znaczenie równorzędne i wówczas należy poszukiwać pełnej zależności (18.14).

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (18.4) - (18.6) daje się uzyskać jedynie w bardzo nielicznych przypadkach. Sprawa szczególnie się komplikuje przy przepływie turbulentnym, gdyż wówczas i same równania wymagają pewnej modyfikacji, by mogły dostatecz-

nie dokładnie opisywać zjawiska zachodzące w płynie (stosują się one jak wiadomo ściśle tylko do przepływu laminarnego).

Przy przepływie turbulentnym główna zmiana prędkości od zerowej na ścianie, do maksymalnej w jądrze strumienia, odbywa się w niewielkiej odległości od ścianki (rys. 18.1). Podobnie kształtuje się profil temperatury. Dla ułatwienia opisu matematycznego zjawiska stosuje się model tzw. warstwy przyściennej (granicznej) polegający na przyjęciu, że jądro płynu porusza się z wyrównaną prędkością, a cała zmiana prędkości odbywa się w cienkiej warstwie przy ścianie, w której zwykle przepływ jest laminarny.



Rys. 18.1. Profil prędkości przy przepływie turbulentnym: rzeczywistość (linia ciągła) i dla modelu warstwy przyściennej (linia przerywana)

Zastosowanie przytoczonego wyżej układu równań różniczkowych do warstwy granicznej umożliwia w wielu przypadkach wyznaczenie jej grubości i rozkładów prędkości oraz temperatur, a dalej obliczenie współczynnika wnikania ciepła.

W przypadku, gdy zawodzą metody analityczne, choćby przybliżone, pozostaje eksperyment. Na drodze doświadczalnej można ustalić zależności (18.14) pomiędzy zmiennymi bezwymiarowymi i uzyskane dane liczbowe zaaproxymować równaniem. Najczęściej stosuje się równania typu potęgowego, w których liczba Nusselta jest wyrażona za pomocą iloczynu pozostałych wielkości bezwymiarowych w odpowiednio dobranych potęgach. Teoria podobieństwa umożliwia wykonywanie badań doświadczalnych na modelach, w innej skali geometrycznej, dla innych płynów i uogólnienie uzyskanych wyników.

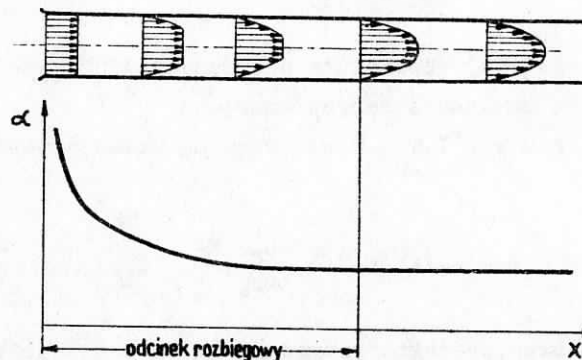
Podany wyżej opis matematyczny zjawiska przewodzenia ciepła w poruszającym się płynie nie uwzględnia możliwości wystąpienia w tym płynie zmian stanu skupienia (wrzenia lub skraplania). Zjawia-

ska te dodatkowo komplikują ten opis podnosząc przez to jeszcze bardziej rangę eksperymentu przy wyznaczaniu współczynnika wnikania ciepła.

18.2. Konwekcja wymuszona

18.2.1. Przepływ w rurze

Podczas przepływu płynu w rurze obserwujemy przy jej wlocie zjawisko kształtowania się profilu prędkości i temperatury. Ma to miejsce na wstępnym odcinku rurociągu o długości rzędu 50 średnic, zwanym odcinkiem rozbiegowym. Za tym odcinkiem profil prędkości i temperatury jest ustabilizowany.



Rys. 18.2. Odcinek rozbiegowy przy przepływie wymuszonym w rurze

Wzory stosowane do obliczania współczynnika wnikania ciepła przy przepływie w rurze dotyczą zwykle przepływu ustabilizowanego. Jeżeli rurociąg jest dostatecznie długi, to wpływ zwiększonej na odcinku rozbiegowym wartości współczynnika wnikania ciepła na jego średnią wartość jest nieduży i można go pominąć. Dla rurociągów krótkich stosujemy odpowiednie współczynniki korekcyjne.

Wspomniane wzory stosuje się ściśle do rurociągów o przekroju kołowym. Dla przekrojów niekołowych można je stosować z dobrym przy-

bliżeniem, jeżeli w miejsce średnicy D podstawimy tzw. średnicę zastępczą D_e zdefiniowaną wzorem

$$D_e = \frac{4A}{U}, \quad (18.17)$$

gdzie A jest powierzchnią przekroju, a U obwodem kanału.

Przy przepływie laminarnym liczba Nusselta zależy od warunków brzegowych na ściance rury. Przy stałej temperaturze ścianki

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} = 3,65. \quad (18.18)$$

Przy stałym strumieniu ciepła na ściance

$$Nu = 4,36. \quad (18.19)$$

Równania (18.18) i (18.19) obowiązują dla dużych liczb Pecleta ($Pe \gg 1$). Uzyskano je na drodze teoretycznej.

Przy przepływie burzliwym w rurze stosujemy równanie empiryczne

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4} \left(\frac{Pr}{Pr_s}\right)^{0,25} \varepsilon_L. \quad (18.20)$$

W równaniu tym wymiarem charakterystycznym (w Nu i Re) jest oczywiście średnica wewnętrzna rury D . Właściwości fizyczne płynu należy wyznaczać dla średniej temperatury płynu, z wyjątkiem Pr_s obliczonego dla temperatury ścianki. Czynniki $(Pr/Pr_s)^{0,25}$ uwzględniający wpływ kierunku przepływu ciepła (do ścianki lub od ścianki) jest istotny wtedy, gdy liczba Prandtla zależy silnie od temperatury. Czynniki poprawkowy ε_L uwzględnia wpływ wstępnego odcinka rozbiegowego i zależy od stosunku długości L do średnicy D oraz od liczby Reynoldsa. Zależność tę podaje zestawienie 18.1.

Czynnik ε_L we wzorze (18.20)

$\frac{L}{D}$	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$1 \cdot 10^4$	1,65	1,50	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,03	1
$2 \cdot 10^4$	1,51	1,40	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02	1
$5 \cdot 10^4$	1,34	1,27	1,18	1,13	1,10	1,08	1,04	1,02	1
$1 \cdot 10^5$	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02	1
$1 \cdot 10^6$	1,14	1,11	1,08	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01	1

Jeżeli rura jest zakrzywiona (np. wężownica), to przy przepływie pojawiają się dodatkowe efekty. Wyrazem ich jest wzrost granicznej liczby Reynoldsa, powyżej której występuje przepływ turbulentny oraz wzrost współczynnika wnikania ciepła w stosunku do rurociągu prostego. Zakrzywienie rury charakteryzuje stosunek jej średnicy D do promienia krzywizny R osi rury. Graniczną liczbę Reynoldsa należy obliczać ze wzoru

$$Re_g = 2300 + 10500 \left(\frac{D}{R}\right)^{0,3}. \quad (18.21)$$

Przy obliczaniu współczynnika wnikania ciepła dla zakresu przepływu turbulentnego ($Re > Re_g$) należy posłużyć się równaniem (18.20) po uzupełnieniu go dodatkowym czynnikiem poprawkowym uwzględniającym zakrzywienie

$$\varepsilon_R = 1 + 1,8 \frac{D}{R}. \quad (18.22)$$

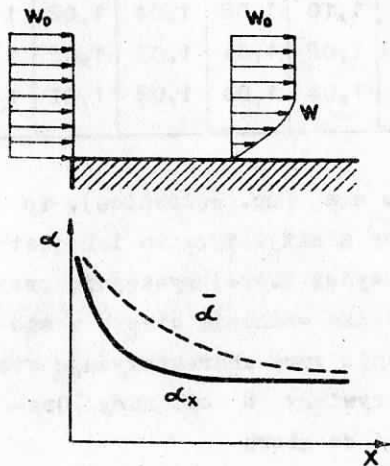
18.2.2. Przepływ wzdłuż powierzchni płaskiej

Jeżeli objętość płynu omywającego powierzchnię płaską jest duża (powierzchnia nie jest np. ścianą kanału), to brak jest charakterystycznego rozmiaru liniowego. W liczbach Nu i Re w miejsce roz-

miaru liniowego wstawia się współrzędną x mierzoną od krawędzi początkowej powierzchni (rys. 18.3)

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda}, \quad (18.23)$$

$$Re_x = \frac{w_0 x}{\nu}. \quad (18.24)$$



Prędkość w_0 w liczbie Reynoldsa jest prędkością przepływu płynu w dużej odległości od powierzchni. Współczynnik wnikania ciepła α_x jest współczynnikiem lokalnym w odległości x od krawędzi. Dla celów praktycznych wygodniej jest operować współczynnikiem wnikania ciepła średnim na odcinku od wlotu do miejsca o współrzędnej x

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{x} \int_0^x \alpha_x dx. \quad (18.25)$$

Rys. 18.3. Konwekcja przy przepływie wzdłuż powierzchni

Odpowiada mu średnia wartość liczby Nusselta

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{\alpha} x}{\lambda}. \quad (18.26)$$

Przepływ laminarny występuje na początkowym odcinku, dla $Re_x < 10^5$. Lokalna liczba Nusselta dla tego przypadku wyraża się wzorem

$$Nu_x = 0,33 Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \left(\frac{Pr}{Pr_s}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (18.27)$$

a jej średnia wartość

$$\bar{Nu} = 0,67 Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \left(\frac{Pr}{Pr_s}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (18.28)$$

Dla przepływu turbulentnego ($Re_x > 10^5$)

$$Nu_x = 0,0296 Re_x^{0,8} Pr^{0,43} \left(\frac{Pr}{Pr_s}\right)^{0,25}, \quad (18.29)$$

$$\bar{Nu} = 0,037 Re_x^{0,8} Pr^{0,43} \left(\frac{Pr}{Pr_s}\right)^{0,25}. \quad (18.30)$$

Znaczenie czynnika $(Pr/Pr_s)^{0,25}$ jest takie samo jak w równaniu (18.20).

Przy małych prędkościach przepływu wpływ konwekcji swobodnej może okazać się decydujący. Należy wówczas dodatkowo obliczyć współczynnik wnikania ciepła ze wzorów przytoczonych w podrozdziale 18.3 i przyjąć do obliczeń wartość większą.

18.2.3. Przepływ prostopadle do rury

Jeżeli płyn o dużej objętości przepływa prostopadle do pojedynczej rury, to dla opisu zjawiska konwekcji stosujemy następujące postacie liczb Nu i Re

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda}, \quad (18.31)$$

$$Re = \frac{w_0 D}{\nu}, \quad (18.32)$$

gdzie D jest średnicą zewnętrzną rury (charakterystyczny rozmiar liniowy), a w_0 prędkością przepływu płynu w dużej odległości rury. Współczynnik wnikania ciepła zmienia się wzdłuż obwodu rury i wartość jaką podstawiamy do równania (18.31) jest jego wartością średnią. Zależność liczby Nusselta od liczb Reynoldsa i Prandtla określają dla tego przypadku równania:

dla $10 < Re < 10^3$

$$Nu = 0,59 Re^{0,47} Pr^{0,38} \left(\frac{Pr}{Pr_s}\right)^{0,25}, \quad (18.33)$$

dla $10^3 \leq Re < 2 \cdot 10^5$

$$Nu = 0,21 Re^{0,62} Pr^{0,38} \left(\frac{Pr}{Pr_s}\right)^{0,25}. \quad (18.34)$$

Gdy płyn przepływa w stosunku do rury pod kątem ostrym φ , to można również stosować wzory (18.33) i (18.34), uzupełniając je poprawką

$$Nu_{\varphi} = Nu_{\perp} \varepsilon_{\varphi} \quad (18.35)$$

którą można obliczyć z przybliżonego równania

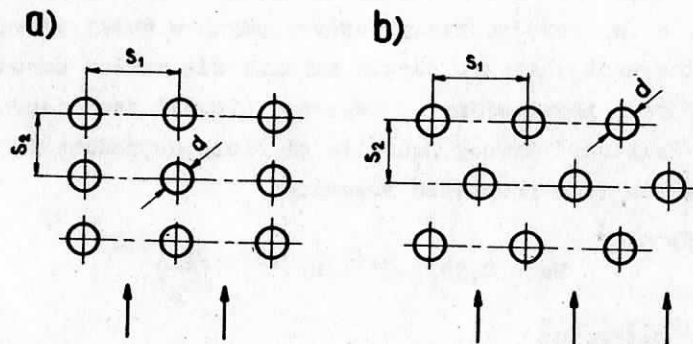
$$\varepsilon_{\varphi} = 1 - 0,54 \cos^2 \varphi, \quad (18.36)$$

słusznego dla $30^{\circ} \leq \varphi \leq 90^{\circ}$.

Podobnie jak w przypadku płyty, dla małych prędkości przepływu płynu i dużej różnicy temperatur płynu i ścianki należy dodatkowo obliczyć współczynnik wnikania ciepła jak dla konwekcji swobodnej i wziąć do obliczeń wartość większą.

18.2.4. Przepływ prostopadle do pęku rur

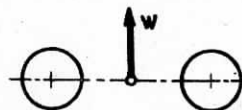
W zagadnieniach technicznych spotykamy najczęściej dwa przypadki układów rur: szeregowy (zwany też korytarzowym) i szachownicowy (rys. 18.4). Oprócz średnicy zewnętrznej D rury pojawiają się dwa dodatkowe wymiary geometryczne - podziałka rur w kierunku prostopadłym do przepływu s_1 i w kierunku zgodnym z przepływem s_2 .



Rys. 18.4. Przepływ prostopadle do pęku rur: a) układ szeregowy, b) układ szachownicowy

Jednakże wymiarem charakterystycznym jest nadal średnica zewnętrzna rury, a więc

$$Nu = \frac{cD}{\lambda}, \quad Re = \frac{wD}{\nu}$$



Rys. 18.5. Do obliczenia prędkości przepływu płynu

Prędkość występująca w liczbie Reynoldsa jest prędkością w najwęższym przekroju strugi płynu (rys. 18.5). Parametry płynu należy obliczać dla średniej temperatury płynu, z wyjątkiem Pr_s (dla temperatury ścianki).

W zakresie liczb Reynoldsa $10^3 \leq Re \leq 10^5$ średnia liczba Nusselta, odpowiadająca średniemu współczynnikowi wnikania ciepła dla pęku rur, może być obliczana z równania

$$Nu = C Re^n Pr^{0,33} \left(\frac{Pr}{Pr_s}\right)^{0,25} \varepsilon_s \varepsilon_1 \quad (18.37)$$

Dla układu szeregowego (korytarzowego) $C = 0,26$; $n = 0,65$; dla układu szachownicowego $C = 0,41$; $n = 0,60$. Czynniki ε_s i ε_1 uwzględnia wpływ podziałek układu rur. Dla układu szeregowego

$$\varepsilon_s = \left(\frac{D}{s_2}\right)^{0,15}, \quad (18.38)$$

a dla układu szachownicowego

$$\begin{aligned} \text{przy } \frac{s_1}{s_2} < 2 & \quad \varepsilon_s = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\frac{1}{6}}, \\ \text{przy } \frac{s_1}{s_2} \geq 2 & \quad \varepsilon_s = 1,12. \end{aligned} \quad (18.39)$$

Czynnik ε_1 uwzględnia wpływ ilości rzędów rur i można go odczytać z zestawienia 18.2.

Zestawienie 18.2

Czynnik ϵ_1 we wzorze 18.37

Układ rur	Ilość rzędów rur		
	1	2	≥ 3
Szeregowy	0,6	0,9	1
Szachownicowy	0,6	0,7	1

18.3. Konwekcja swobodna

Jak już wyżej wspomniano, przy konwekcji swobodnej ruch płynu jest wywołany siłami wyporu powstałymi w wyniku różnicy gęstości płynu spowodowanej zróżnicowaniem jego temperatury. Ruch płynu, podobnie jak przy przepływie wymuszonym, może być laminarny lub turbulentny.

Podstawowym kryterium decydującym o przebiegu zjawiska jest liczba Grashofa (18.12)

$$Gr = \frac{g\beta\Delta t l_0^3}{\nu^2}$$

Spotykane w praktyce problemy z zakresu konwekcji swobodnej dzielimy na dwie grupy: konwekcję w przestrzeni nieograniczonej i konwekcję w przestrzeni ograniczonej.

18.3.1. Konwekcja swobodna w przestrzeni nieograniczonej

Jeżeli objętość płynu wymieniającego drogą konwekcji ciepło z powierzchnią ciała stałego jest duża, można operować wyidealizowanym modelem konwekcji w przestrzeni nieograniczonej. Współczynnik wnikania ciepła jest wówczas określony względem różnicy temperatury ścianki i temperatury płynu w dużej odległości od ścianki (temperatura t w równaniu (18.1)). Natomiast właściwości płynu są obliczone dla średniej temperatury płynu i ścianki

$$t_m = \frac{t + t_p}{2}$$

gdyż o przebiegu zjawiska decyduje głównie warstwa płynu przylegającego do ścianki. Wymiarem charakterystycznym (o ile taki istnieje) jest wymiar w kierunku pionowym (a ogólnie - w kierunku działania sił masowych).

Ponieważ współczynnik wnikania ciepła nie jest jednakowy na całej powierzchni, operujemy zwykle jego średnią wartością. Obliczenie współczynnika wnikania ciepła przeprowadza się z bezwymiarowych równań typu (18.16)

$$Nu = f(Gr, Pr, K_1)$$

uzyskanych bądź na drodze teoretycznej (dla niektórych przypadków przepływu laminarnego), bądź też na drodze doświadczalnej. Dla pionowej ściany wymiarem charakterystycznym jest wysokość $l_0 = h$. W wypadku, gdy nie cała ściana wymienia ciepło z płynem, należy wziąć wysokość tej jej części, której temperatura różni się od temperatury płynu. Liczbę Nusselta obliczamy ze wzoru

$$Nu = C(Gr Pr)^n \tag{18.40}$$

Współczynniki C i n podano w zestawieniu 18.3.

Zestawienie 18.3

Współczynniki C i n we wzorze (18.40)

Charakter przepływu	Gr Pr	C	n
Brak (przewodzenie)	$< 10^{-3}$	0,45	0
Laminarny	$10^{-3} \div 5 \cdot 10^2$	1,18	1/8
Przejściowy	$5 \cdot 10^2 \div 2 \cdot 10^7$	0,54	1/4
Turbulentny	$> 2 \cdot 10^7$	0,135	1/3

Wymiar charakterystyczny $l_0 = H$ występuje w liczbie Grashofa w potęgze 3, a ponieważ dla przepływu turbulentnego wykładnik $n = 1/3$, więc po prawej stronie równania (18.40) pozostaje wymiar liniowy w pierwszej potęgze, tak jak w liczbie Nusselta, po lewej stronie tego równania. Po uproszczeniu równanie to nie zawiera wymiaru liniowego, co oznacza że nie ma on wpływu na przebieg konwekcji swobodnej przy rozwiniętym przepływie turbulentnym.

Dla poziomego walca i dla kuli można z dobrym przybliżeniem stosować równanie (18.40) ze współczynnikami takimi jak dla pionowej ściany. Jako wymiar charakterystyczny należy brać średnicę zewnętrzną $l_0 = D$.

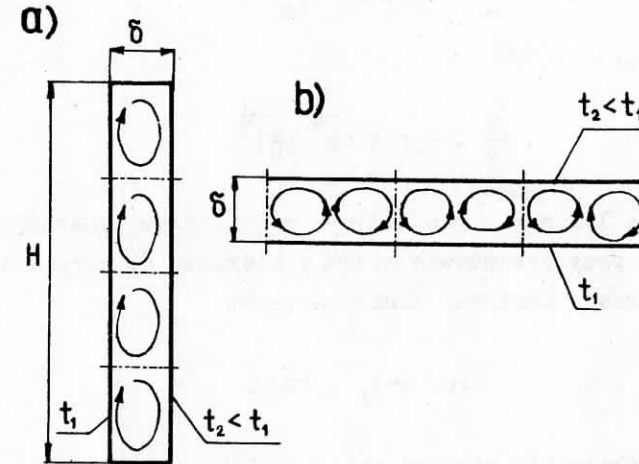
Wzór (18.40) i wykładniki n z zestawienia 18.3 można stosować z przybliżeniem również dla płyty poziomej. Współczynnik C należy zwiększyć o 30% dla płyty odwróconej powierzchnią cieplejszą (od płynu) ku górze, a zmniejszyć o 30% gdy powierzchnia cieplejsza jest skierowana w dół. Jako wymiar charakterystyczny należy przyjmować najmniejszy wymiar liniowy.

18.3.2. Konwekcja swobodna w przestrzeni ograniczonej

Najbardziej typowym przykładem tej klasy zagadnień jest wymiana ciepła pomiędzy dwoma powierzchniami o różnych temperaturach rozdzielonymi warstwą płynu. W przypadku konwekcji swobodnej w przestrzeni nieograniczonej krążący przy ścianie płyn przekazuje ciepło od ścianki do partii płynu oddalonych od ścianki. W tym przypadku krążący płyn przekazuje ciepło od jednej ścianki do drugiej (rys. 18.6). Dlatego też nie operuje się współczynnikiem wnikania ciepła α , gdyż ten zawsze ujmuje efekty wymiany ciepła pomiędzy ścianką i płynem. Dla zamkniętej szczeliny gazowej rozdzielającej dwie powierzchnie o różnych temperaturach gęstość strumienia ciepła przekazywanego na drodze konwekcji swobodnej pomiędzy powierzchniami oblicza się jak dla przegrody zbudowanej z ciała sta-

łego (równ. (17.29)), stosując odpowiednio zwiększony zastępczy współczynnik przewodzenia ciepła λ_e

$$\dot{q} = \frac{\lambda_e}{\delta} (t_1 - t_2). \quad (18.41)$$



Rys. 18.6. Konwekcja swobodna w zamkniętej szczelinie

Należy pamiętać, że jest to tylko pewien model obliczeniowy i nie można z niego wyciągać żadnych fizycznych konsekwencji - np. wyznaczać profil temperatury w warstwie płynu lub stosować go dla przypadku nieustalonego przewodzenia ciepła.

Bezwymiarową wielkością zawierającą zastępczy współczynnik przewodzenia ciepła warstwy płynu λ_e jest iloraz λ_e/λ , gdzie λ jest rzeczywistym współczynnikiem przewodzenia ciepła płynu. Iloraz ten jest funkcją tych samych wielkości bezwymiarowych, jak w innych przypadkach konwekcji swobodnej, tzn.

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = f(Gr, Pr, K_1), \quad (18.42)$$

przy czym wymiarem charakterystycznym w liczbie Grashofa jest szerokość szczeliny $l_0 = \delta$, bez względu na jej usytuowanie. Właściwości płynu należy obliczać dla średniej temperatury ścian szczeliny $t_m = (t_1 + t_2)/2$.

Dla szczeliny pionowej $H > 3\delta$ i dla $2 \cdot 10^4 < Gr < 2 \cdot 10^5$

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,18 Gr^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\delta}{H}\right)^{\frac{1}{9}}, \quad (18.43)$$

a dla $2 \cdot 10^5 < Gr < 11 \cdot 10^6$

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,065 Gr^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\delta}{H}\right)^{\frac{1}{9}}. \quad (18.44)$$

Dla szczeliny poziomej wpływ konwekcji uwidacznia się tylko przy przepływie ciała w kierunku do góry i to powyżej pewnej granicznej wartości iloczynu $Gr Pr$

$$(Gr Pr)_g = 1700.$$

Zastępczy współczynnik przewodzenia ciepła warstwy płynu obliczamy ze wzoru

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = C(Gr Pr)^n, \quad (18.45)$$

przy czym współczynniki C i n mają wartości

$$\text{dla } 10^4 < Gr < 4 \cdot 10^5 \quad C = 0,21; \quad n = \frac{1}{4},$$

$$\text{dla } 4 \cdot 10^5 < Gr < 10^7 \quad C = 0,075; \quad n = \frac{1}{3}.$$

Równaniu (18.45) można nadać charakter uniwersalny, pomijając dla szczelin pionowych wpływ ich wysokości i przyjmując następujące stałe

$$\text{dla } 10^3 < Gr Pr < 10^6 \quad C = 0,105; \quad n = 0,3;$$

$$\text{dla } 10^6 < Gr Pr < 10^7 \quad C = 0,40; \quad n = 0,2.$$

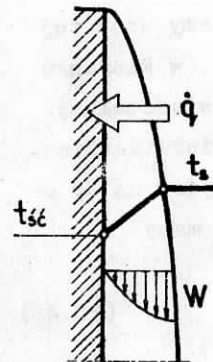
18.4. Konwekcja przy skraplaniu pary

Gdy temperatura powierzchni omywanej przez parę jest niższa od temperatury nasycenia, to na powierzchni wystąpi skraplanie (kondensacja). W przypadku, gdy para jest przegrzana musi ona najpierw w sposób typowy dla zwykłej konwekcji obniżyć temperaturę do temperatury nasycenia. Para nasycona w zetknięciu ze ścianką ulega skropleniu, przy czym powstające skropliny mogą stworzyć ciągłą warstwę lub pojedyncze krople. W pierwszym przypadku mówimy o kondensacji błonowej, w drugim o kondensacji kropłowej. W praktyce najczęściej mamy do czynienia z kondensacją błonową. Skropliny powstające na ściance spływają w dół, dzięki czemu proces kondensacji może przebiegać w sposób ustalony, przy stałej w czasie grubości warstwy kondensatu (a zmiennej w zależności od położenia). Na rysunku 18.7 pokazano warstwę kondensatu na pionowej ścianie, z zaznaczeniem profilu temperatur i prędkości.

Sposób tworzenia się warstwy kondensatu na ścianie i jej spływania w dół ma istotny wpływ na wymianę ciepła przy skraplaniu. Para skrapla się bowiem na zewnętrznej powierzchni warstwy i oddane przez nią ciepło parowania musi być na drodze przewodzenia przez tą warstwę przetransportowane do ścianki.

Dla pionowej ściany, na której skrapla się nieruchoma para, można przy założeniu laminarności spływu kondensatu uzyskać na drodze teoretycznej rozkład grubości warstwy wzdłuż wysokości oraz rozkłady prędkości i temperatur. Na podstawie tego można wyznaczyć lokalny współczynnik wnikania ciepła w odległości x od górnej krawędzi ściany

$$\alpha_x = \sqrt[4]{\frac{g r \rho^2 \lambda^3}{4\eta(t_s - t_{sc})x}}. \quad (18.46)$$



Rys. 18.7. Rozkład temperatury i prędkości w warstwie skropliny na pionowej ścianie

W równaniu tym ρ, η, λ oznaczają gęstość, współczynnik przewodzenia ciepła i dynamiczny współczynnik lepkości cieczy dla średniej jej temperatury w warstwie, będącej średnią arytmetyczną temperatury ścianki t_{sc} i temperatury nasycenia t_s , $t_m = (t_s + t_{sc})/2$, r jest utajonym ciepłem parowania, g oznacza przyspieszenie ziemskie. Średni współczynnik wnikania ciepła na całej wysokości ściany H , będący średnią całkową

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{H} \int_0^H \alpha_x dx,$$

otrzymamy po scałkowaniu równania (18.46)

$$\bar{\alpha} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{g r \rho^2 \lambda^3}{4 \eta (t_s - t_{sc}) H}}, \quad (18.47)$$

a po zgrupowaniu stałych liczbowych przed pierwiastkiem

$$\bar{\alpha} = 0,943 \sqrt[4]{\frac{g r \rho^2 \lambda^3}{\eta (t_s - t_{sc}) H}}. \quad (18.47a)$$

Dla innych przypadków kondensacji błonowej stosujemy wzór tej samej postaci, dobierając odpowiednio wymiar liniowy (w kierunku pionowym) i znajdując na drodze teoretycznej lub doświadczalnej odpowiednią wartość współczynnika liczbowego przed pierwiastkiem. I tak przy skraplaniu się n i e r u c h o m e j pary na p o z i o m e j rurze o średnicy zewnętrznej D mamy

$$\bar{\alpha} = 0,725 \sqrt[4]{\frac{g r \rho^2 \lambda^3}{\eta (t_s - t_{sc}) D}}. \quad (18.48)$$

W przypadku wymuszonego p r z e p ł y w u pary względem ścianki, na której przebiega kondensacja stosuje się równanie empiryczne typu

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}_n} = f(\text{Re}_p, \Delta t), \quad (18.49)$$

gdzie $\bar{\alpha}$ jest średnim rzeczywistym współczynnikiem wnikania ciepła, $\bar{\alpha}_n$ jest średnim współczynnikiem wnikania ciepła dla przypadku kondensacji pary nieruchomej,

$$\text{Re}_p = \frac{w_p l_0}{\nu_p}$$

jest liczbą Reynoldsa dla pary (w_p - prędkość przepływu pary o największym przekroju), $\Delta t = t_s - t_{sc}$. Szczegółowe wzory podaje specjalistyczna literatura z zakresu wymiany ciepła. Przykładowo, przy kondensacji niskociśnieniowej pary wodnej na poziomych rurkach i przy liczbach Reynoldsa rzędu kilkuset $\bar{\alpha}/\bar{\alpha}_n$ zmienia się w granicach od 1 do 1,6.

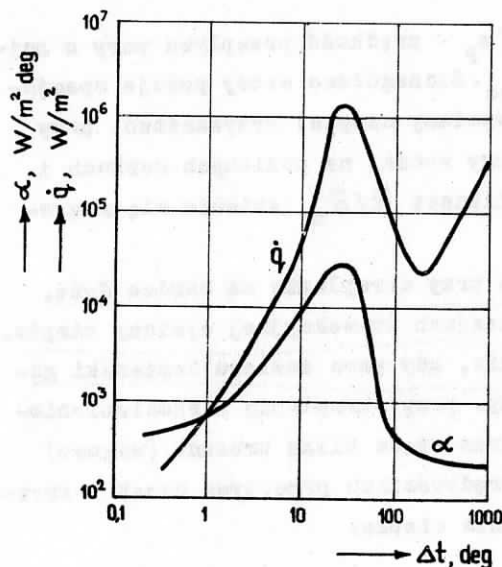
Współczynniki wnikania ciepła przy skraplaniu są bardzo duże, znacznie wyższe niż w innych rodzajach konwekcyjnej wymiany ciepła. Ich wartość maleje jednak znacznie, gdy para zawiera domieszki gazu nieskrapającego się. I tak np. przy skraplaniu niskociśnieniowej pary wodnej domieszka powietrza rzędu kilku procent (wagowo) może spowodować przy niedużych prędkościach przepływu nawet 5-krotne obniżenie współczynnika wnikania ciepła.

18.5. Konwekcja przy wrzeniu

Jeżeli ciecz o temperaturze nasycenia lub bliskiej jej kontaktuje się z powierzchnią ciała stałego o temperaturze wyższej od temperatury nasycenia, to w konwekcyjnej wymianie ciepła pomiędzy powierzchnią i cieczą uczestniczy proces zmiany stanu skupienia cieczy. Dla bardzo małych nadwyżek Δt temperatury powierzchni ponad temperaturę nasycenia zwykła konwekcja dominuje w tym złożonym zjawisku. W wyniku tej konwekcji ciepło odbierane od powierzchni ciała stałego jest przenoszone do powierzchni rozdziału faz (cieczy i pary) i tam jest zużywana na zmianę stanu skupienia. Proces taki nazywamy p a r o w a n i e m. W miarę wzrostu nadwyżki temperatury powierzchni zmiana stanu skupienia cieczy zachodzi przy tej powierzchni. W wyniku tego na powierzchni powstają pęcherzyki pary, które są unoszone w kierunku powierzchni rozdziału faz.

Proces ten nazywamy w r z e n i e m p ę c h e r z y k o w y m. W stosunku do parowania charakteryzuje go znaczne zwiększenie intensywności zjawiska konwekcji wyrażające się szybkim wzrostem gęstości strumienia ciepła i współczynnika wnikania ciepła (rys.

18.8). Duża intensywność wymiany ciepła tłumaczy się tym, że przekazywanie ciepła od powierzchni ogrzewalnej do wrzącej cieczy odbywa się wprost na tej powierzchni, która jest stale zwilżona cieczą. Powstały w wyniku wrzenia pęcherzyk pary odrywa się od powierzchni ustępując miejsca innym partiom cieczy.



Rys. 18.8. Gęstość strumienia ciepła i współczynnik wnikania ciepła przy wrzeniu wody (dla $p = 1$ bar)

niem b ł o n o w y m, charakteryzuje się spadkiem intensywności procesu wrzenia, gdyż warstwa pary izoluje powierzchnię. Ciepło odbierane od powierzchni ciała stałego musi być na drodze przewodzenia przetransportowane na powierzchnię styku błonki z cieczą i tam dopiero jest zużywane na zmianę stanu skupienia. W wyniku tego zjawiska mimo wzrostu temperatury powierzchni maleje gęstość strumienia ciepła odbieranego od powierzchni, a tym samym współczynnik wnikania ciepła. Maksymalna gęstość strumienia ciepła, jaką uzyskuje się przy wrzeniu pęcherzykowym, nazywamy k r y t y c z n ą gęstością strumienia ciepła. W urządzeniach technicznych rea-

lizujących proces wrzenia (kotły, wyparki itp.) tak dobiera się parametry pracy, by uzyskać wrzenie pęcherzykowe. Wrzenie błonowe jest nie tylko nieskonomiczne (mała intensywność procesu) ale w pewnych przypadkach, gdy wrzenie przebiega przy wysokich parametrach, może być niebezpieczne z powodu przegrzania ścianki powyżej dopuszczalnej temperatury.

Opis matematyczny zjawiska wrzenia jest bardzo trudny. Na przebieg tego zjawiska ma wpływ, oprócz omawianej wyżej różnicy temperatur lub gęstości strumienia ciepła, wiele różnych czynników. Z właściwości substancji wrzącej najistotniejsze są: jej gęstość w stanie ciekłym i parowym, utajone ciepło parowania, napięcie powierzchniowe, lepkość, współczynnik przewodzenia ciepła. Gdy wrzenie mieszanina cieczy i pary, czyli para mokra, istotny jest jej stopień suchości. Bardzo istotny wpływ mogą mieć również domieszki innych substancji (inne ciecze, rozpuszczone gazy lub ciała stałe). Na przebieg wrzenia ma wpływ także geometria układu, w którym przebiega ten proces (powierzchnia pozioma, pionowa, przestrzeń nieograniczona, ograniczona, przepływ w rurze poziomej lub pionowej), charakter przepływu: swobodny czy wymuszony, a przy wymuszonym prędkość przepływu. Wpływ ma także rodzaj i stan powierzchni, na której odbywa się wrzenie. Z tego też względu dla potrzeb praktycznych opracowuje się równania empiryczne o bardzo wąskich zakresach stosowalności: dla określonej substancji i geometrii i dla niewielkich zakresów zmian parametrów przy których przebiega wrzenie. Najczęściej wzory te uwzględniają tylko wpływ gęstości strumienia ciepła na współczynnik wnikania ciepła przy wrzeniu i wtedy mają postać

$$\alpha = C \dot{q}^n \quad (18.50)$$

Niekiedy uwzględnia się również wpływ ciśnienia uzupełniając równanie (18.50) do postaci

$$\alpha = C \dot{q}^n p^m \quad (18.51)$$

Bardzo nieliczne równania empiryczne uwzględniają wpływ prędkości przepływu przy przepływie wymuszonym wrzącej cieczy w rurze. Wartości współczynników w równaniach (18.50) i (18.51) można znaleźć w specjalistycznej literaturze z zakresu wymiany ciepła.

R o z d z i a ł 19

WYMIANA CIEPŁA PRZEZ PROMIENIOWANIE

Ten rodzaj transportu ciepła polega na przenoszeniu energii za pośrednictwem fal elektromagnetycznych. Energię w postaci promieniowania emitują wszystkie ciała niezależnie od sąsiedztwa innych ciał. Wszystkie ciała pochłaniają też (choć w części) padającą na nie energię promienistą. Efekt wymiany ciepła przez promieniowanie polega na tym, że ciała o wyższej temperaturze wysyłają więcej energii niż pochłaniają energii pochodzącej od ciał o temperaturze niższej.

19.1. Promieniowanie ciał stałych i cieczy

19.1.1. Emisja promieniowania

Olbrzymia większość ciał stałych i cieczy emituje energię promienistą w całym zakresie długości fal, od $\lambda = 0$ do $\lambda = \infty$, tzn. widmo promieniowania jest ciągłe. Promieniowanie selektywne (widmo nieciągłe) wysyłają czyste metale. W promieniowaniu ciał stałych i cieczy bierze udział bardzo cienka warstwa przy powierzchni ciała dzięki czemu promieniowanie możemy traktować jako powierzchniowe. Ilość emitowanej energii promienistej zależy od temperatury ciała promieniującego i od stanu jego powierzchni. Ten drugi czynnik ujmujemy liczbowo za pomocą tak zwanej e m i s y j n o ś c i ϵ . Wyraża ona stosunek energii promienistej emitowanej przez dane ciało \dot{E} do ilości energii \dot{E}_0 , jaką w tej samej temperaturze i z tej samej powierzchni mogłoby wysłać tzw. c i a ł o d o s k o n a l e c z a r n e charakteryzujące się maksymalną zdolnością emitowania energii

$$\epsilon = \left(\frac{\dot{E}}{\dot{E}_0} \right)_{\pi} \quad (19.1)$$

Ciało doskonale czarne jest wyidealizowanym modelem dającym się zrealizować z dużą, ale nie stuprocentową dokładnością. Jeżeli ciało nie będące doskonale czarnym wysyła energię promienistą zmniejszoną w stosunku do ciała doskonale czarnego jednakowo w całym widmie promieniowania, to nazywamy je ciałem szarym. To również jest wyidealizowany model rzeczywistych ciał.

Gęstość strumienia energii wypromieniowywanego przez ciało doskonale czarne jest w myśl prawa Stefana-Boltzmana proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury bezwzględnej

$$\dot{e}_o = \frac{\dot{E}_o}{A} = \sigma_o T^4. \quad (19.2)$$

Występująca w powyższym równaniu stała σ_o , zwana stałą Stefana ma wartość

$$\sigma_o = 5,667 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \text{ deg}^4} = 4,885 \cdot 10^{-8} \frac{kcal}{m^2 \text{ h deg}^4}.$$

Ze względów rachunkowych wygodnie jest przedstawić równanie (19.2) następująco

$$\dot{e}_o = C_o \left(\frac{T}{100}\right)^4, \quad (19.3)$$

gdzie

$$C_o = 5,667 \frac{W}{m^2 \text{ deg}^4} = 4,885 \frac{kcal}{m^2 \text{ h deg}^4}.$$

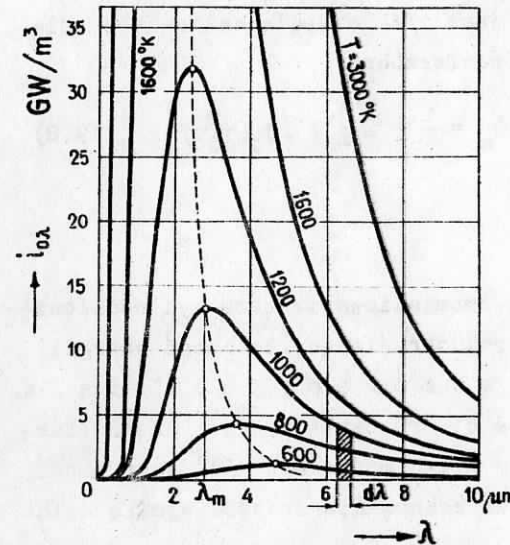
Dla ciała szarego gęstość strumienia emitowanej energii promienistej wynosi

$$\dot{e} = \varepsilon \sigma_o T^4 = \varepsilon C_o \left(\frac{T}{100}\right)^4. \quad (19.4)$$

Rozkład energii promienistej w widmie promieniowania nie jest równomierny, tzn. na różne długości fal przypadają różne ilości energii. Rozkład ten nie jest przy tym stały - sposób rozkładu emi-

rowanej energii na poszczególne długości fal zależy od temperatury. Stosunek ilości energii $d\dot{e}_o$ emitowanej przez ciało doskonale czarne o temperaturze T w paśmie długości fal od λ do $\lambda + d\lambda$, do szerokości $d\lambda$ tego pasma nazywamy monochromatyczną intensywnością promieniowania $i_{o\lambda}$. W myśl prawa Plancka zależy ona od temperatury i długości fali według równania

$$i_{o\lambda} = \frac{d\dot{e}_o}{d\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T) - 1]} \quad (19.5)$$



Rys. 19.1. Monochromatyczna intensywność promieniowania ciała doskonale czarnego

Stale C_1 i C_2 mają następujące wartości

$$C_1 = 2\pi^5 h c^2 = 0,374 \cdot 10^{-15} \text{ W m}^2,$$

$$C_2 = h c/k = 0,01443 \text{ m deg}.$$

Ilustracją graficzną równania (19.5) jest rys. 19.1. Jak widać z rysunku rozkład energii promienistej w widmie promieniowania dla danej temperatury, posiada maksimum. Długość fali λ_m niosącej największą ilość energii można wyznaczyć z prawa Wiena

$$\lambda_m T = C_2/5 = 2,88 \cdot 10^{-3} \text{ m deg} \quad (19.6)$$

dającego się wyprowadzić z prawa Plancka (19.5).

Ilość energii emitowanej przez element powierzchni ciała, wynikająca z prawa Stefana-Boltzmana (19.4) jest sumą energii wysyłanej we wszystkich kierunkach. Strumień energii wysyłanej w kierunku odchylonym o kąt α od normalnej do powierzchni \dot{E}_α (rys. 19.2)

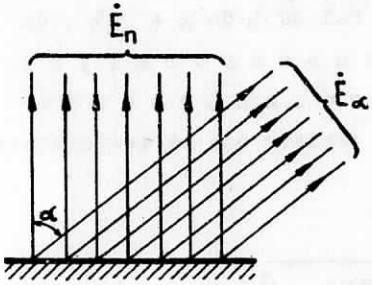
jest związany ze strumieniem energii emitowanej w kierunku normalnym \dot{E}_n zależnością

$$\dot{E}_\alpha = \dot{E}_n \cos \alpha, \quad (19.7)$$

będącą wyrazem prawa Lamberta. Sumując (całkując) strumienie energii wysyłane we wszystkich kierunkach znajdujemy, że strumień energii emitowanej w kierunku normalnym jest $1/\pi$ częścią całkowitej emisji powierzchni

$$\dot{E}_n = \frac{1}{\pi} \dot{E} = \frac{1}{\pi} A \varepsilon C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4. \quad (19.8)$$

Rys. 19.2. Ilustracja prawa Lamberta



19.1.2. Absorpcja promieniowania

Padające na powierzchnię ciała promieniowanie może być pochłonięte, odbite lub przepuszczone. Ułamek określający tę część energii, która jest pochłaniana nazywamy absorpcyjnością a , podobnie refleksyjność r określa, jaka część energii jest odbijana, a diatermiczność d jaka część energii jest przepuszczana. Z prawa zachowania energii wynika związek

$$a + r + d = 1. \quad (19.9)$$

Większość ciała nie przepuszcza energii promienistej i wówczas $d=0$, $a+r = 1$.

Zdolność do pochłaniania energii pozostaje w ścisłym związku ze zdolnością do jej emitowania związek ten wynika z drugiej zasady termodynamiki, w myśl której ciepło nie może być przekazywane w kierunku niższej temperatury, a w stanie równowagi (równe temperatury) nie ma wymiany ciepła. Spełnienie tego warunku przy przeka-

zywaniu ciepła na drodze promieniowania wymaga, by stosunek strumienia energii emitowanej na drodze promieniowania do jego absorpcyjności był jednakowy dla wszystkich ciał o tej samej temperaturze i równał się emisji ciała doskonale czarnego

$$\frac{\dot{E}_1}{a_1} = \frac{\dot{E}_2}{a_2} = \dots = \dot{E}_0. \quad (19.10)$$

Zależność powyższa nosi nazwę prawa Kirchhoffa. Porównując równania (19.10) i (19.1) otrzymujemy związek pomiędzy emisyjnością i absorpcyjnością

$$\varepsilon = a. \quad (19.11)$$

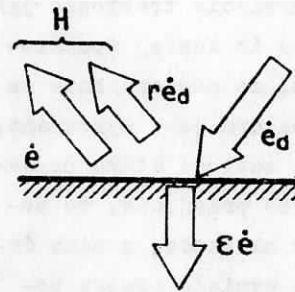
Prawo Kirchhoffa dotyczy zarówno promieniowania obejmującego całe widmo jak i promieniowania monochromatycznego.

19.1.3. Wymiana ciepła przez promieniowanie pomiędzy ciałami rozdzielonymi ośrodkiem przezroczystym

Jeżeli ciała o różnych temperaturach powierzchni są rozdzielone ośrodkiem przezroczystym (np. gaz o diatermiczności $d = 1$ lub próżnia), to pomiędzy nimi zachodzi wymiana ciepła na drodze promieniowania. Przebiega ona niezależnie od innych sposobów wymiany energii (np. konwekcji) i jej efekt w postaci wymienionego ciepła

dodaje się do ciepła wymienionego w inny sposób. Jeżeli ośrodek rozdzielający powierzchnię nie jest przezroczysty, to oczywiście i wtedy powierzchnie te wymieniają ciepło na drodze promieniowania, jednak w zjawisku uczestniczy ośrodek i całość tych zjawisk należy rozpatrywać łącznie.

Gęstość całkowitego strumienia energii promienistej wysyłanego z powierzchni nazywa się jasnością



Rys. 19.3. Jasność powierzchni promieniującej

tej powierzchni H jest ona sumą emisji własnej powierzchni i odbitej części promieniowania padającego na powierzchnię

$$H = \dot{e} + r \dot{e}_d \quad (19.12)$$

Energia emitowana przez powierzchnię ciała może w wypadku jej wklęsłości częściowo padać na tę powierzchnię, reszta jest wysyłana poza powierzchnię i pada na inne powierzchnie.

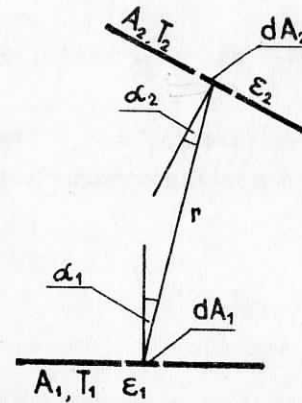
W celu wyprowadzenia równania określającego ilość ciepła wymienionego na drodze promieniowania pomiędzy dwoma powierzchniami założymy, że powierzchnie te niewiele odbierają od powierzchni doskonale czarnych (tzn. że ich emisyjności są bliskie jedności $\epsilon_1 \approx 1$, $\epsilon_2 \approx 1$). W przypadku, gdy powierzchnie te nie zamykają pewnego obszaru przestrzeni założymy, że w istniejących pomiędzy tymi powierzchniami lukach nie znajdują się ciała odbijające promieniowanie powierzchni 1 i 2. Dzięki tym założeniom można przyjąć, że ilość ciepła wymienionego na drodze promieniowania pomiędzy rozpatrywanymi powierzchniami \dot{Q}_{1-2} jest różnicą tej części energii wysłanej przez powierzchnię 1, która padła na powierzchnię 2 \dot{E}_{1-2} i tej części energii wysłanej przez powierzchnię 2, która padła na powierzchnię 1 \dot{E}_{2-1}

$$\dot{Q}_{1-2} = \dot{E}_{1-2} - \dot{E}_{2-1} \quad (19.13)$$

Znak równości w zależności (19.13) należy oczywiście traktować jak równość przybliżoną z dokładnością tym większą im lepiej spełnione są przytoczone założenia. Założymy ponadto, że powierzchnie te są izotermiczne, tzn. na każdej z nich temperatura jest wyrównana, oraz że na każdej z powierzchni emisyjność ma wartość stałą na całej powierzchni. Gdyby założenie to było nie do przyjęcia, to powierzchnie można podzielić na tyle części, by na każdej z nich dało się ono zastosować, a następnie rozpatrzeć wymianę ciepła pomiędzy każdą parą z powstałych z podziału powierzchni.

Element dA_1 powierzchni A_1 (rys. 19.4) wysyła w kierunku elementu dA_2 powierzchni A_2 , tzn. w kierunku odchylonym od normalnej kąt α_1 , strumień energii

$$d\dot{E}_{1\alpha_1} = \frac{1}{\pi} dA_1 \epsilon_1 C_0 \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \cos \alpha_1$$



Uzasadnieniem tego równania są zależności (19.7) i (19.8). Z energii tej padającej na powierzchnię dA_2 część

$$d\dot{E}_{1\alpha_1} d\Omega_{1-2}$$

gdzie $d\Omega_{1-2}$ jest kątem bryłowym pod którym widać powierzchnię dA_2 z powierzchni dA_1

$$d\Omega_{1-2} = \frac{dA_2 \cos \alpha_2}{r^2}$$

Rys. 19.4. Wymiana energii promienistej pomiędzy dwoma powierzchniami

Z energii, którą wysyłała powierzchnia dA_1 w kierunku powierzchni dA_2 została zaabsorbowana część $d^2\dot{E}_{1-2}$ określona ułamkiem ϵ_2 (na mocy prawa Kirchhoffa), a zatem

$$d^2\dot{E}_{1-2} = \epsilon_1 \epsilon_2 C_0 \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (19.14)$$

Podobnie ilość energii pochłoniętej przez element powierzchni dA_1 z emisji elementu powierzchni dA_2 wynosi

$$d^2\dot{E}_{2-1} = \epsilon_1 \epsilon_2 C_0 \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (19.15)$$

Strumień ciepła wymienianego przez promieniowanie pomiędzy elementami powierzchni dA_1 i dA_2 , po uwzględnieniu równania (19.13) wynosi

$$d^2\dot{Q}_{1-2} = d^2\dot{E}_{1-2} - d^2\dot{E}_{2-1} =$$

$$= \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (19.16)$$

Strumień ciepła wymienionego pomiędzy powierzchniami A_1 i A_2 jest sumą tych elementarnych strumieni, czyli całką rozciągniętą na obie powierzchnie

$$\dot{Q}_{1-2} = \int_{A_1} \int_{A_2} d^2\dot{Q}_{1-2}$$

Wykorzystując założenia niezmienności temperatur i emisyjności na powierzchniach, można wielkości te oraz C_0 wyjąć przed znak całki otrzymując ostatecznie

$$\dot{Q}_{1-2} = A_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi_{1-2} \quad (19.17)$$

gdzie

$$\varphi_{1-2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (19.18)$$

nosi nazwę s t o s u n k u k o n f i g u r a c j i. Jak widać z równania (19.18) stosunek konfiguracji jest wielkością geometryczną, zależną wyłącznie od kształtów i wzajemnego usytuowania powierzchni 1 i 2. Widoczna jest również relacja

$$A_1 \varphi_{1-2} = A_2 \varphi_{2-1} \quad (19.19)$$

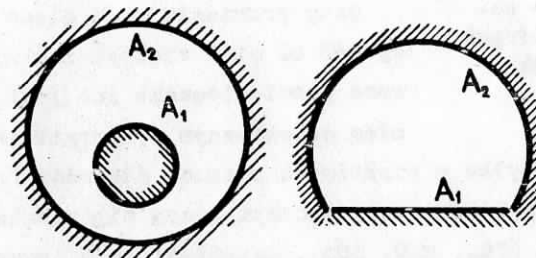
zwana prawem wzajemności.

W szczególnych przypadkach dwóch powierzchni wymieniających ciepło na drodze promieniowania można uwolnić się od założenia o wartościach emisyjności bliskich 1, tzn. uwzględnić dowolne wartości emisyjności ε_1 i ε_2 . Możliwe to jest dla układu dwóch powierzchni zamykających wycinek przestrzeni, gdy jedna z nich jest niewklęsła. Przykłady takich układów powierzchni pokazano na rys. 19.5. Dla takiego przypadku ilość energii wymienianej na drodze promieniowania określa równanie

$$\dot{Q}_{1-2} = A_1 \varepsilon_{1-2} C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (19.20)$$

gdzie

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (19.21)$$



Rys. 19.5. Układy powierzchni wymieniających ciepło wg równań (19.20) i (19.21)

nosi nazwę stosunku wymiany energii promienistej. W równaniach powyższych indeksem 1 oznaczono powierzchnię niewklęsłą. W przypadku przeciwnego kierunku przepływu ciepła należy korzystać z zależności

$$\dot{Q}_{2-1} = -\dot{Q}_{1-2}$$

W szczególnym przypadku, gdy powierzchnia A_1 jest bardzo mała w stosunku do powierzchni A_2 równanie (19.21) można uprościć

$$\varepsilon_{1-2} = \varepsilon_1 \quad \text{gdy} \quad \frac{A_1}{A_2} \rightarrow 0. \quad (19.22)$$

Drugi szczególny przypadek rozpatrywanego układu powierzchni, to powierzchnie o tej samej krzywiźnie, położone blisko siebie. Mogą to być np. dwa koncentryczne walce rozdzielone cienką szczeliną lub dwie równoległe powierzchnie dostatecznie rozległe w stosunku do wielkości rozdzielającej je szczeliny (rys. 19.6). Dla takiego układu $A_1 = A_2$ i

$$\frac{1}{\varepsilon_{1-2}} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1. \quad (19.23)$$

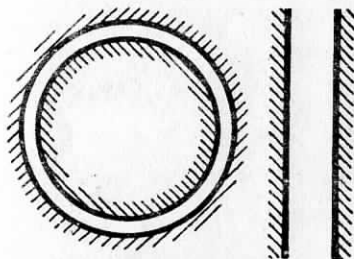
19.2. Promieniowanie gazów

Gazy promieniają w nieco odmienny sposób od ciał stałych i cieczy. Po pierwsze promieniowanie ich jest promieniowaniem selektywnym - energia jest emitowana

i pochłaniana tylko w niektórych pasmach długości fal (widmo nieciągłe). Pod względem energetycznym liczy się promieniowanie gazów trójatomowych (CO_2 , H_2O , SO_2), natomiast gazy dwuatomowe można traktować jak przezroczyste (nie pochłaniające i nie wysyłające promieniowania).

Druga zasadnicza różnica, to udział w emisji czy też absorpcji promieniowania całej masy gazu, podczas gdy dla ciał stałych i cieczy w zjawiskach tych uczestniczyła bardzo cienka warstwa przy powierzchni, a praktycznie sama powierzchnia.

Te różnice sprawiają, że podstawowe równania opisujące zjawiska promieniowania gazów odbiegają swą postacią od analogicznych równań ciał stałych i cieczy. I tak w miejsce prawa Stefana-Boltzmann



Rys. 19.6. Układy powierzchni, dla których obowiązuje równanie (19.23)

pojawiają się równania (uzyskane na drodze doświadczalnej), w których temperatura bezwzględna występuje w potęgach niższej od 4, a ponadto pojawia się wpływ grubości warstwy promieniującego gazu L i jego ciśnienia. Dla dwutlenku węgla równanie to ma postać

$$\dot{e}_{\text{CO}_2} = 3,5(pL)^{1/3} \left(\frac{T}{100}\right)^{3,5}, \quad (19.24)$$

a dla pary wodnej

$$\dot{e}_{\text{H}_2\text{O}} = 3,5 p^{0,8} L^{0,6} \left(\frac{T}{100}\right)^3. \quad (19.25)$$

W równaniach tych \dot{e} jest wyrażone w $\text{kcal/m}^2\text{h}$. Ciśnienie p jest ciśnieniem cząstkowym promieniującego gazu w mieszaninie, w której się znajduje, wyrażonym w atmosferach technicznych. Wymiar liniowy L jest grubością równoległosciennej warstwy gazu, wyrażaną w metrach. Jeżeli bryła promieniującego gazu ma inny kształt, to należy operować zastępczą grubością, obliczaną z równania

$$L = 3,6 \frac{V}{A}, \quad (19.26)$$

gdzie V jest objętością, a A powierzchnią bryły gazowej. Należy podkreślić, że równania (19.24) i (19.25) dotyczą przypadków, gdy rozpatrywany gaz zawiera tylko jeden promieniujący składnik rozcieńczony co najwyżej gazami przezroczystymi.

W wypadku, gdy w promieniującej mieszaninie znajduje się więcej niż jeden gaz promieniujący, nie obowiązuje zasada addytywności.

Obliczenie strumienia ciepła wymienianego pomiędzy masą gazu i ścianką jest stosunkowo proste wtedy, gdy zarówno ścianka jak i promieniujący gaz są izotermiczne, a ponadto gdy ścianka ma dużą emisyjność. Można wówczas posłużyć się równaniem

$$\dot{Q}_{g-s} = A \varepsilon_s C_o \left[\varepsilon_g \left(\frac{T}{100}\right)^4 - a_g \left(\frac{T_s}{100}\right)^4 \right], \quad (19.27)$$

gdzie

$$\varepsilon_g = \varepsilon_g(T, p, L),$$

$$a_g = a_g(T, p, L),$$

przy czym w równaniu (19.27) należy brać ε_g dla temperatury gazu T_g , a a_g dla temperatury ścianki T_s .

W wypadku równoczesnej konwekcyjnej i promienistej wymiany ciepła pomiędzy izotermiczną masą gazu o temperaturze t_g i izotermiczną powierzchnią o temperaturze t_s często operuje się tzw. zastępczym współczynnikiem wnikania ciepła

$$\alpha = \alpha_k + \alpha_r, \quad (19.28)$$

gdzie α_k jest konwekcyjnym współczynnikiem wnikania ciepła (por. rozdz. 18), a α_r promienistym współczynnikiem wnikania ciepła obliczonym ze wzoru

$$\alpha_r = \frac{\dot{Q}_{r,g-s}}{A(t_g - t_s)}, \quad (19.29)$$

w którym $\dot{Q}_{r,g-s}$ należy obliczać z równania (19.27). Przy użyciu zastępczego współczynnika wnikania ciepła całkowity strumień ciepła wymienianego między gazem i ścianką obliczamy z równania

$$\dot{Q} = \dot{Q}_k + \dot{Q}_r = \alpha A(t_g - t_s). \quad (19.30)$$

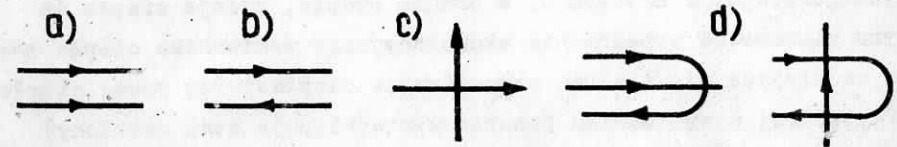
Równaniem (19.30) można się posłużyć również wtedy, gdy gaz omywający ściankę jest przezroczysty (niepromieniujący), a ścianka jest napromieniowana przez inne ciało stałe o tej samej temperaturze co gaz. W równaniu (19.29) należy wówczas wstawić strumień ciepła obliczany wg jednego z równań z rozdziału 19.1.3.

R o z d z i a ł 20

WYMIENNIKI CIEPŁA

Wymiennikiem ciepła nazywamy urządzenie, którego głównym zadaniem jest wymiana ciepła pomiędzy dwoma nie mieszającymi się płynami. Z uwagi na zasadę działania wymienniki dzielą się na dwie grupy: wymienniki przeponowe i wymienniki akumulacyjne.

W wymienniku przeponowym, zwanym też rekuperatorem płyny wymieniające ciepło omywają z dwóch stron przegrodę (przeponę) i wymiana ciepła odbywa się na drodze przenikania ciepła przez tę przegrodę. Jeżeli płyny przepływają równolegle i w zgodnych kierunkach, to wymiennik ciepła nazywamy współprądowym, a gdy kierunki przepływu są przeciwne - wymiennikiem przeciwnym. Przepływ prostopadły płynów nazywamy prądem krzyżowym. Jeżeli w wymienniku ciepła występują równocześnie różne kierunki przepływu, to mówimy wówczas o prądach mieszanych. Rodzaje przepływu płynów w wymiennikach przedstawiono na rysunku 20.1.

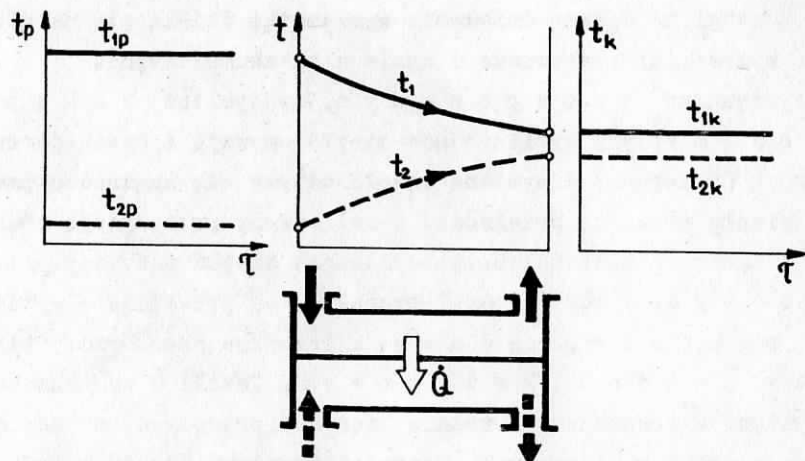


Rys. 20.1. Rodzaje przepływu w wymiennikach ciepła:

a) współprąd, b) przeciwny, c) prąd krzyżowy, d) przykłady prądu mieszane

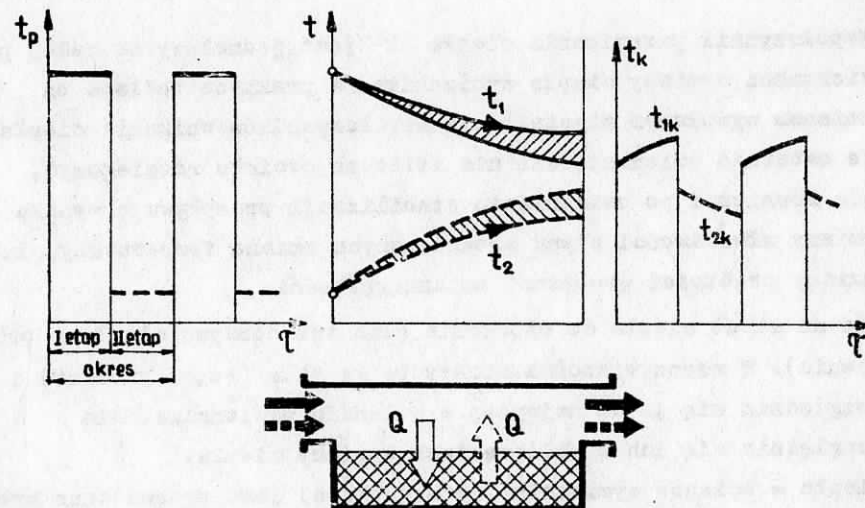
Wymiana ciepła w wymienniku przeponowym może przebiegać w sposób ustalony lub nieustalony. Nieustalona wymiana ciepła ma miejsce przy uruchamianiu, wyłączaniu z ruchu, lub zmianie obciążenia wy-

miennika ciepła. W pracy ciągłej ma miejsce ustalona wymiana ciepła charakteryzująca się stałością w czasie temperatur i strumienia ciepła. Temperatuury natomiast zmieniają się wzdłuż drogi przepływu płynów. Przebieg czasowy temperatur wlotowych i wylotowych oraz rozkład temperatur wzdłuż drogi przepływu płynów pokazano na rys. 20.2. W wymienniku akumulacyjnym płyny wymieniające między sobą ciepło omywają na przemian ciało stałe zwane wypełnieniem. Wypełnienie to nagrzewa się w pierwszym etapie od



Rys. 20.2. Przebiegi temperatury we współprądowym rekuperatorze

płynu gorącego, a następnie, w drugim etapie, oddaje ciepło do płynu zimnego. W wypełnieniu akumulacyjnego wymiennika ciepła zawsze ma miejsce nieustalone przewodzenie ciepła. Przy pracy ciągłej (przy której w wymienniku przeponowym występuje stan ustalony) nieustalony przepływ ciepła jest przepływem periodycznym. Przebiegi czasowe temperatur płynów są periodyczne, a ilość ciepła pobieranego przez wypełnienie w etapie grzania równa się ilości ciepła oddawanego w etapie chłodzenia do płynu zimnego. Ilustracją tego jest rysunek 20.3.



Rys. 20.3. Przebiegi temperatury we współprądowym wymienniku akumulacyjnym

W dalszym ciągu będzie podany opis zjawisk zachodzących w wymiennikach przeponowych, gdyż jest to najczęściej stosowany typ wymiennika. Wymienniki akumulacyjne stosowane są rzadko, a ich teoria jest skomplikowana.

20.1. Ustalony przepływ ciepła w wymiennikach przeponowych

W celu uzyskania możliwie prostego opisu zjawisk zachodzących w wymienniku przeponowym czynimy następujące założenia upraszczające:

1. Entalpie płynów wymieniających ciepło są proporcjonalne do temperatury, co jest równoznaczne ze stałością ciepła właściwego c_p . Dopuszczalność takiego założenia omówiono w rozdziale 4 i w rozdziale 8. Z uwagi na i tak niezbyt wysoką dokładność obliczeń wymiany ciepła, założenie to stosuje się nawet w odniesieniu do gazów rzeczywistych.

2. Współczynnik przenikania ciepła k jest jednakowy na całej powierzchni wymiany ciepła wymiennika. W praktyce podlega on zmianom wywołanym niestałością współczynników wnikania ciepła. Te ostatnie zmieniają się nie tylko na odcinku rozbiegowym, ale również i po osiągnięciu stabilizacji przepływu w wyniku zmiany właściwości płynu spowodowanych zmianą temperatury, lub zmiany prędkości wywołanej zmianą gęstości.

3. Nie ma strat ciepła do otoczenia (lub też dopływu ciepła z otoczenia). W rzeczywistości straty te są małe (rzędu procent) i uwzględnia się je co najwyżej w bilansie wymiennika. Nie uwzględnia się ich w obliczeniach wymiany ciepła.

4. Ciepło w ścianie wymiennika (przegrodzie) jest przewodzone prostopadle do ścianki. W rzeczywistości temperatura ścianki zmienia się w kierunku przepływu płynów i pociąga za sobą przewodzenie ciepła wzdłuż ścianki. Jednakże wzdłużny gradient temperatury jest znacznie mniejszy od poprzecznego, stąd dopuszczalność tego założenia.

Będziemy stosowali następujące oznaczenia: indeksy 1 i 2 oznaczające numery płynów oraz indeksy p i k oznaczające odpowiednio dolot i wylot z wymiennika ciepła. Wzwykle indeksem 1 oznaczamy płyn oddający ciepło (o wyższej temperaturze).

Z prawa zachowania energii, przy uwzględnieniu założenia 3, wynika że spadek strumienia entalpii płynu 1 równa się przyrostowi strumienia entalpii płynu 2 i obie te wielkości równają się ciepłu wymienionemu pomiędzy płynami

$$\dot{i}_{1p} - \dot{i}_{1k} = \dot{i}_{2k} - \dot{i}_{2p} = \dot{Q}. \quad (20.1)$$

Na mocy założenia 1 zmiana strumienia entalpii jest proporcjonalna do zmiany temperatury

$$\Delta \dot{i} = \dot{m} c_p \Delta t. \quad (20.2)$$

Iloczyn strumienia masy i ciepła właściwego nazywamy pojemnością cieplną płynu

$$W = \dot{m} c_p. \quad (20.3)$$

W miejsce (20.2) można więc napisać

$$\Delta \dot{I} = W \Delta t, \quad (20.4)$$

a równania (20.1) zastąpić równaniami

$$W_1 \Delta t_1 = W_2 \Delta t_2 = \dot{Q}, \quad (20.5)$$

gdzie

$$\Delta t_1 = t_{1p} - t_{1k} \quad (20.6)$$

jest spadkiem temperatury płynu grzejącego, a

$$\Delta t_2 = t_{2k} - t_{2p}$$

jest przyrostem temperatury płynu grzanego.

Podstawowym faktem jaki należy uwzględnić przy obliczaniu wymiennika ciepła jest to, że wskutek zmian temperatur płynów wzdłuż drogi przepływu zmienia się różnica temperatur płynów

$$\Delta t = t_1 - t_2.$$

Jest ona funkcją położenia na powierzchni. Powierzchnię jako zmienną będziemy oznaczali literą f , przy czym $0 \leq f \leq A$, gdzie A jest całą powierzchnią wymiany ciepła wymiennika. Zmiennosc różnicy temperatur umożliwia stosowanie równania (17.36) wprost tylko dla elementu powierzchni df

$$d\dot{Q} = k \Delta t df. \quad (20.7)$$

Dla całego wymiennika można napisać

$$\dot{Q} = kA \Delta t_m \quad (20.8)$$

gdzie

$$\Delta t_m = \frac{1}{A} \int_0^A \Delta t \, df \quad (20.9)$$

jest średnią różnicą temperatur w wymienniku. Aby operowanie wzorem (20.8) było dogodnie, należy Δt_m wyrazić za pomocą skrajnych temperatur płynów t_{1p} , t_{1k} , t_{2p} , t_{2k} .

20.1.1. Współprąd

Rozkład temperatur płynów we współprądowym wymienniku przeponowym przedstawiono na rys. 20.4. Strumień ciepła wymienianego przez element df powierzchni wyraża równanie (20.7)

$$d\dot{Q} = k(t_1 - t_2)df \quad (20.7a)$$

Ilość wymienionego ciepła jest jednocześnie równa spadkowi entalpii płynu 1 na tym odcinku

$$d\dot{Q} = -d\dot{I}_1 = -w_1 dt_1 \quad (20.10)$$

oraz przyrostowi entalpii płynu 2

$$d\dot{Q} = d\dot{I}_2 = w_2 dt_2 \quad (20.11)$$

Obliczając z równań (20.10) i (20.11) różniczki dt_1 i dt_2 oraz odejmując je od siebie otrzymujemy

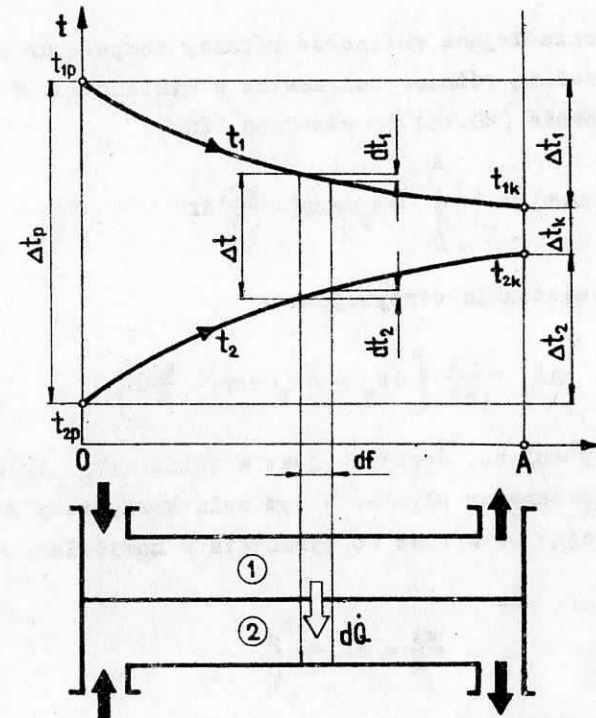
$$d(t_1 - t_2) = -d\dot{Q} \left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} \right) \quad (20.12)$$

Wprowadzamy pojęcie tzw. zastępczej pojemności cieplnej

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \quad (20.13)$$

nie mającej żadnego sensu fizycznego, a będącej jedynie wielkością obliczeniową. Podstawiając równania (20.13) i (20.7a) do równania (20.12) otrzymujemy

$$\frac{d(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = -\frac{k}{W} df \quad (20.14)$$



Rys. 20.4. Rozkład temperatur we współprądowym wymienniku przeponowym

Powyższemu równaniu różniczkowemu towarzyszy warunek brzegowy

$$\text{dla } f = 0 \quad t_1 - t_2 = t_{1p} - t_{2p} = \Delta t_p \quad (20.15)$$

oznaczający, że na początku wymiennika ($f=0$) jest zadana początkowa różnica temperatur. Rozwiązaniem powyższego zagadnienia brzegowego jest funkcja

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \Delta t_p \exp\left(-\frac{kf}{W}\right) \quad (20.16)$$

określająca zmienność różnicy temperatur obu płynów wzdłuż powierzchni wymiany ciepła. Kładąc $f = A$ uzyskamy końcową różnicę temperatur w wymienniku

$$\Delta t_k = \Delta t_p \exp\left(-\frac{kA}{W}\right). \quad (20.17)$$

Znając funkcję określającą zmienność różnicy temperatur płynów możemy obliczyć średnią różnicę temperatur w wymienniku. W tym celu podstawiamy równanie (20.16) do równania (20.9)

$$\Delta t_m = \frac{1}{A} \int_0^A \Delta t_p \exp\left(-\frac{kf}{W}\right) df$$

i po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$\Delta t_m = \frac{W}{kA} \left[\Delta t_p - \Delta t_p \exp\left(-\frac{kA}{W}\right) \right].$$

Jak już wyżej wspomniano, dogodnie jest wyrazić Δt_m tylko za pomocą skrajnych temperatur płynów. W tym celu korzystamy z równania (20.17) podstawiając je wprost do wyrażenia w nawiasie i wyliczając zeń ułamek

$$\frac{kA}{W} = \ln \frac{\Delta t_p}{\Delta t_k}$$

Ostatecznie otrzymujemy równanie

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_p - \Delta t_k}{\ln \frac{\Delta t_p}{\Delta t_k}}, \quad (20.18)$$

w myśl którego średnia różnica temperatur w wymienniku jest **średnią logarytmiczną**. Dla niewielkich zmian temperatur płynów $\Delta t_p \approx \Delta t_k$ można się posługiwać średnią arytmetyczną

$$\Delta t_m \approx \frac{1}{2} (\Delta t_p + \Delta t_k), \quad (20.19)$$

Uzyskane równania (20.5), (20.8) i (20.18) umożliwiają **zaprojektowanie** wymiennika ciepła, tzn. obliczenie powierzchni wymiany ciepła wymiennika niezbędnej dla osiągnięcia założonego efektu wymiany ciepła. Przy tego rodzaju obliczeniach danych jest 5 wartości z zespołu $t_{1p}, t_{1k}, t_{2p}, t_{2k}, W_1, W_2$ oraz współczynnik przenikania ciepła k (sposób jego obliczania omówiono w poprzednich rozdziałach). Z równania bilansu energii (20.5) obliczamy brakującą szóstą wielkość, po czym z równania (20.18) obliczamy średnią różnicę temperatur. Wyznaczając strumień ciepła wymienionego w wymienniku z jednego z równań bilansowych, np.:

$$\dot{Q} = W_1(t_{1p} - t_{1k}),$$

obliczamy, przy wykorzystaniu równania (20.8), powierzchnię wymiany ciepła

$$A = \frac{\dot{Q}}{k \Delta t_m}. \quad (20.20)$$

Oddzielnym zagadnieniem jest skonstruowanie wymiennika polegające na wylczeniu wszystkich wymiarów geometrycznych dla uprzednio przyjętego typu konstrukcji tak, aby uzyskać żadaną powierzchnię wymiany ciepła oraz spełnienie innych warunków (np. wytrzymałościowych).

Drugi typ obliczeń wymiennika ciepła polega na określeniu charakterystyki statycznej wymiennika o danej powierzchni wymiany ciepła A i danym współczynniku przenikania ciepła k . Charakterystyka statyczna jest związkiem pomiędzy temperaturami wylotowymi

(końcowymi) płynów t_{1k} i t_{2k} a temperaturami dolotowymi t_{1p} , t_{2p} oraz pojemnościami cieplnymi płynów W_1 i W_2 . Zamiast temperatur t_{1k} i t_{2k} można poszukiwać zmian temperatur płynów Δt_1 i Δt_2 , gdyż

$$t_{1k} = t_{1p} - \Delta t_1 \quad (20.21)$$

$$t_{2k} = t_{2p} + \Delta t_2 \quad (20.22)$$

Z równania bilansu (20.5) wynika jeden związek pomiędzy tymi przyrostami

$$W_1 \Delta t_1 = W_2 \Delta t_2 \quad (20.5)$$

Drugi wynika z równania (20.17), przy czym należy tu uwzględnić, że

$$\Delta t_k = \Delta t_p - \Delta t_1 - \Delta t_2.$$

Mamy więc

$$\Delta t_p = (\Delta t_p - \Delta t_1 - \Delta t_2) \exp\left(-\frac{kA}{W}\right) \quad (20.23)$$

Rozwiązując układ równań (20.5) i (20.23) otrzymujemy

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_p} = \frac{1 - \exp\left(-\frac{kA}{W}\right)}{1 + \frac{W_1}{W_2}} \quad (20.24)$$

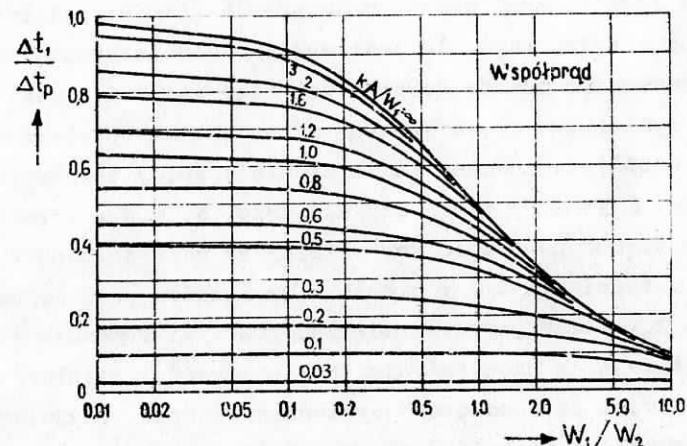
$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_p} = \frac{1 - \exp\left(-\frac{kA}{W}\right)}{1 + \frac{W_2}{W_1}} \quad (20.25)$$

Ze względów praktycznych lepiej jest przedstawić powyższe funkcje w postaci

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_p} = \frac{1 - \exp\left[-\left(1 + \frac{W_1}{W_2}\right) \frac{kA}{W_1}\right]}{1 + \frac{W_1}{W_2}} \quad (20.26)$$

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_p} = \frac{1 - \exp\left[-\left(1 + \frac{W_2}{W_1}\right) \frac{kA}{W_2}\right]}{1 + \frac{W_2}{W_1}} \quad (20.27)$$

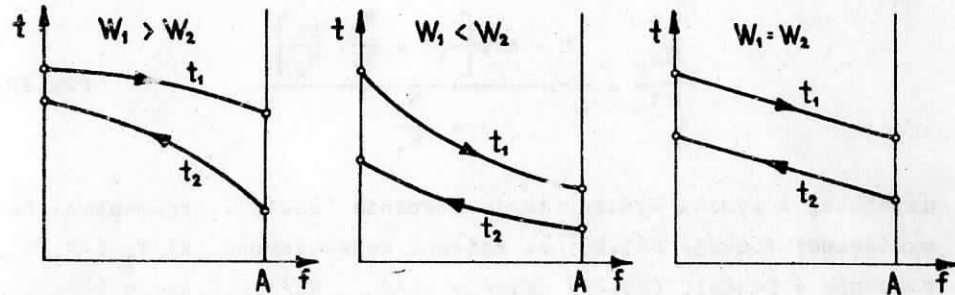
uzyskanej w wyniku wykorzystania równania (20.13). Argumentami bezwymiarowej funkcji (20.26) są zmienne bezwymiarowe kA/W_1 i W_1/W_2 , podobnie w funkcji (20.27) zmienne kA/W_2 i W_2/W_1 . Funkcja (20.26) powstaje zatem z funkcji (20.25) przez zamianę indeksów 1 i 2. Wykres funkcji (20.26) przedstawiono na rysunku 20.5. Dla obliczenia Δt_2 można posłużyć się tym samym wykresem używając jako argumentów W_2/W_1 i kA/W_2 , lub wykorzystać równanie bilansu (20.5).



Rys. 20.5. Zredukowana zmiana temperatury płynu w wymienniku przepływowym

20.1.2. Przeciwprąd

W wymienniku ciepła przeciwprądowym płyny wymieniające ciepło płyną równoległe w kierunkach przeciwnych. Rozkłady temperatur płynów zależą od wzajemnego stosunku pojemności cieplnych płynów W_1 i W_2 . Możliwe typy tych rozkładów przedstawiono na rysunku 20.6.

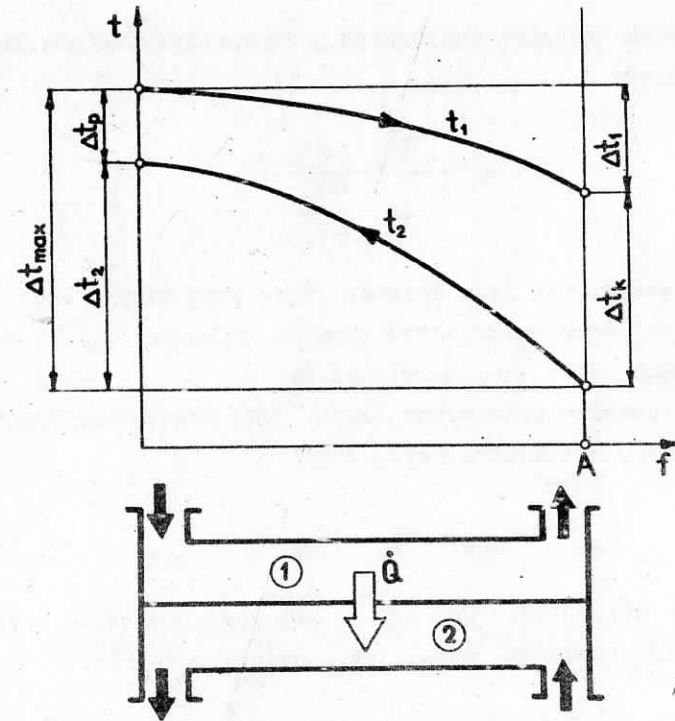


Rys. 20.6. Rozkłady temperatur w wymiennikach przeciwprądowych

Wymiennik przeciwprądowy umożliwia podgrzanie płynu zimniejszego powyżej temperatury wylotowej płynu gorącego - czego nie dało się osiągnąć w wymienniku współprądowym. W wymienniku współprądowym nie ma również możliwości zmniejszenia nieodwracalności zjawiska wymiany ciepła, gdyż nie jest możliwe dowolne zmniejszenie różnicy temperatur płynów kosztem zwiększenia powierzchni wymiany ciepła. W wymienniku przeciwprądowym zwiększanie powierzchni wymiany ciepła umożliwia znaczne zmniejszenie różnicy temperatur. Pełną odwracalność ($\Delta t = 0$) można uzyskać przy $W_1 = W_2$. Przeciwprąd jest zatem termodynamicznie korzystniejszy od współprądu.

Do opisu zjawisk wymiany ciepła w wymienniku przeciwprądowym przy $W_1 \neq W_2$ można posłużyć się podstawowymi równaniami dla współprądu, zmieniając w nich jedynie znak pojemności cieplnej jednego z płynów. Jeżeli za "początek" wymiennika ciepła przyjmiemy dółot płynu 1, to należy zmienić znak W_2 . Zastępcza pojemność cieplna wyraża się zatem równaniem

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2} \quad (20.28)$$



Rys. 20.7. Rozkład temperatur w przeciwprądowym wymienniku przepływowym

Zmienność różnicy temperatur wzdłuż powierzchni określa równanie (20.16)

$$\Delta t = \Delta t_p \exp\left(-\frac{kf}{W}\right),$$

z którego wynika również związek pomiędzy końcową i początkową różnicą temperatur (20.17)

$$\Delta t_k = \Delta t_p \exp\left(-\frac{kA}{W}\right).$$

Ilość wymienianego ciepła obliczamy z równania (20.8)

$$\dot{Q} = kA \Delta t_m,$$

przy czym średnia różnica temperatur jest również średnią logarytmiczną (20.18)

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_p - \Delta t_k}{\ln \frac{\Delta t_p}{\Delta t_k}}$$

Jak łatwo zauważyć, nie jest istotne gdzie przyjmimy "początek", a gdzie "koniec" wymiennika, gdyż zamiana indeksów p i k nie zmienia wartości średniej logarytmicznej.

Różnica temperatur dolotowych płynów jest maksymalną rozpiętością temperatur w wymienniku (rys. 20.7)

$$\Delta t_{\max} = t_{1p} - t_{2p} \quad (20.29)$$

Dla wymiennika współprądowego była to zarazem początkowa różnica temperatur. Dla współprądu natomiast obowiązują związki

$$\Delta t_{\max} = \Delta t_p + \Delta t_2 = \Delta t_k + \Delta t_1, \quad (20.30)$$

które wraz z równaniem bilansu

$$W_1 \Delta t_1 = W_2 \Delta t_2$$

oraz równaniem (20.17)

$$\Delta t_k = \Delta t_p \exp\left(-\frac{kA}{W}\right)$$

umożliwiają wyznaczenie końcowych temperatur płynów w zadanym wymienniku ciepła, poprzez obliczenie zmian temperatur płynów

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_{\max}} = \frac{1 - \exp\left(-\frac{kA}{W}\right)}{1 - \frac{W_1}{W_2} \exp\left(-\frac{kA}{W}\right)} \quad (20.31)$$

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_{\max}} = \frac{1 - \exp\left(-\frac{kA}{W}\right)}{1 - \frac{W_2}{W_1} \exp\left(-\frac{kA}{W}\right)} \quad (20.32)$$

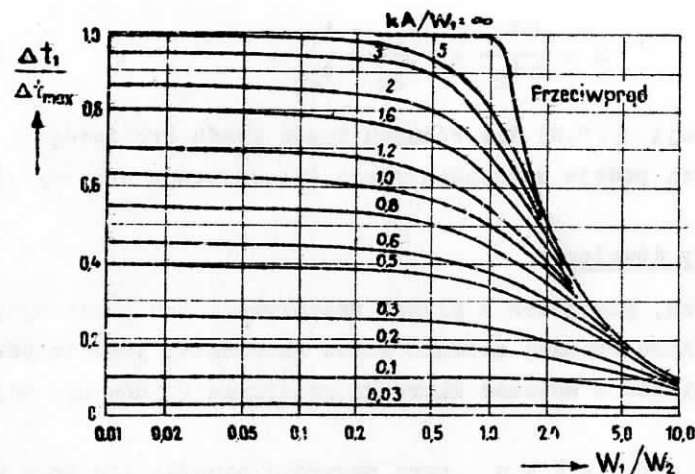
Wyrażając zastępczą pojemność cieplną z równania (20.38) otrzymujemy w miejsce równania (20.31) funkcję

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_{\max}} = \frac{1 - \exp\left[-\left(1 - \frac{W_1}{W_2}\right) \frac{kA}{W_1}\right]}{1 - \frac{W_1}{W_2} \exp\left[-\left(1 - \frac{W_1}{W_2}\right) \frac{kA}{W_1}\right]} \quad (20.33)$$

bezwymiarowych argumentów kA/W_1 i W_1/W_2 , której wykres przedstawia rysunek 20.8. Dla obliczenia Δt_2 można posłużyć się równaniem bilansu

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 \frac{W_1}{W_2} \quad (20.34)$$

po uprzednim wyznaczeniu Δt_1 .



Rys. 20.8. Zredukowana zmiana temperatury płynu w wymienniku przeciwnym

20.1.3. Prąd krzyżowy i prądy mieszane

Do obliczeń wymienników o prądzie krzyżowym lub o prądach mieszanych stosuje się również równanie (20.8)

$$\dot{Q} = kA \Delta t_m,$$

przy czym średnią różnicę temperatur Δt_m oblicza się mnożąc średnią różnicę obliczoną jak dla wymiennika przeciwaprądowego o tych samych temperaturach dolotowych i wylotowych płynów, przez czynnik poprawkowy ε

$$\Delta t_m = \varepsilon \frac{t_{1p} - t_{2k} - (t_{1k} - t_{2p})}{\ln \frac{t_{1p} - t_{2k}}{t_{1k} - t_{2p}}} \quad (20.35)$$

Poprawka ε jest funkcją zmiennych bezwymiarowych zależnych od skrajnych temperatur płynów

$$P = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_{\max}} = \frac{t_{2k} - t_{2p}}{t_{1p} - t_{2p}}, \quad (20.36)$$

$$R = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{t_{1p} - t_{1k}}{t_{2k} - t_{2p}}. \quad (20.37)$$

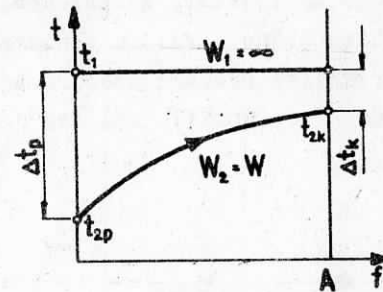
Wykresy funkcji $\varepsilon(P, R)$ dla różnych typów prądu krzyżowego i prądów mieszanych podaje specjalistyczna literatura z wymiany ciepła.

20.1.4. Prądy dowolne

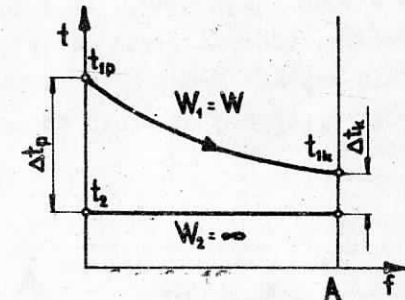
W przypadku, gdy jeden z płynów przepływających przez wymiennik podlega izobarycznej zmianie stanu skupienia, jego temperatura nie ulega zmianie i wówczas kierunki przepływu płynów nie mają znaczenia.

W s k r a p l a c z u para nasycona skrapla się przy np. jednoczesnym podgrzewaniu drugiego płynu (chłodzącego). Rozkłady temperatur w skraplaczu przedstawia rysunek 20.9.

W p a r o w n i k u wrze i odparowuje ciecz (płyn 2) a płyn grzejny (1) ulega ochłodzeniu. Rozkłady temperatur w parowniku przedstawiono na rysunku 20.10.



Rys. 20.9. Rozkłady temperatur w skraplaczu



Rys. 20.10. Rozkłady temperatur w parowniku

Ponieważ kierunki przepływu płynów w tych wymiennikach nie mają znaczenia, można je traktować jak wymienniki współprądowe. W tych wzorach, w których występuje zastępcza pojemność cieplna W należy umieścić pojemność cieplną płynu nie zmieniającego stanu skupienia, gdyż dla płynu zmieniającego stan skupienia pojemność cieplna jest nieskończenie duża.

20.2. Nieustalony przepływ ciepła w wymienniku przeponowym

Nieustalony przepływ ciepła pojawia się przy rozruchu, wyłączeniu z ruchu, lub zmianie obciążenia wymiennika. Ogólnie biorąc jest on spowodowany zmiennością temperatur dolotowych płynów, a także zmiennością ich strumieni masy, a co za tym idzie i pojemności cieplnych.

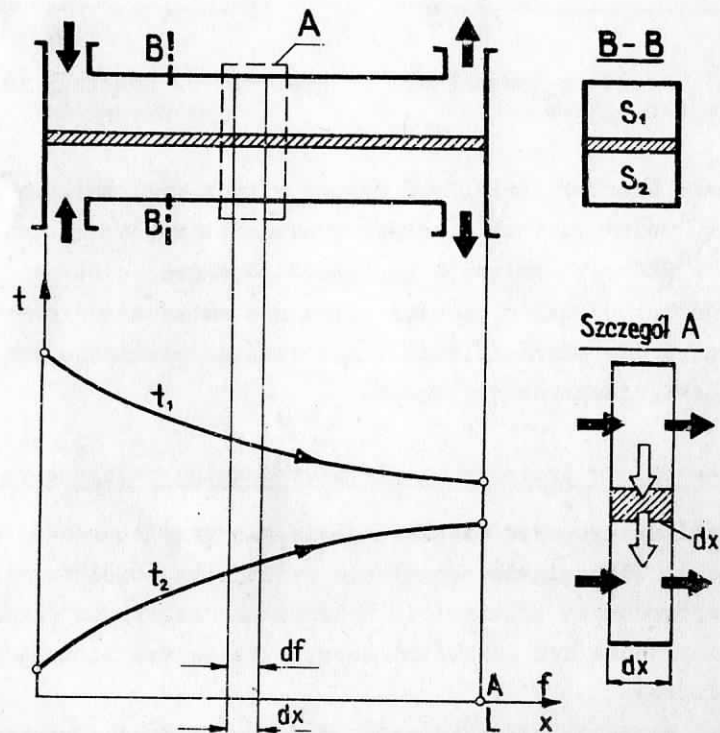
Poniżej rozpatrzmy nieustalony przepływ ciepła w wymienniku współprądowym spowodowany zmiennością jedynie temperatur płynów dolotowych, a więc przy stałych pojemnościach cieplnych płynów

$$W_1 = \text{idem},$$

$$W_2 = \text{idem}.$$

Będziemy korzystali z tych samych założeń upraszczających, które poczyniliśmy przy opisie ustalonego przewodzenia ciepła w wymienniku. Dodatkowo założymy, że w ścianie rozdzielającej płyny wymieniające ciepło można zaniedbać poprzeczny rozkład temperatury, a więc że liczby Biota $Bi_1 = \alpha_1 \delta_s / \lambda_s$, $Bi_2 = \alpha_2 \delta_s / \lambda_s$ (δ_s, λ_s - grubość i współczynnik przewodzenia ciepła ścianki) są dostatecznie małe, tzn. że ścianka jest dostatecznie cienka i dobrze przewodzi ciepło (por. rozdz. 17.5.5). Ponadto przyjmujemy, że przekroje kanałów, którymi płyną oba płyny są niezmiennie, oraz że powierzchnia omywana przez każdy z płynów przyrasta proporcjonalnie do drogi przebytej od wlotu do wymiennika (rys. 20.11), tzn. że

$$\frac{x}{L} = \frac{f}{A}$$



Rys. 20.11. Wymiennik współprądowy

oraz

$$dx = \frac{L}{A} df. \quad (20.38)$$

Bilansując wycinek kanału, którym płynie płyn 1 (rys. 20.11) stwierdzimy, że ciepło przekazane do ścianki

$$\alpha_1 (t_1 - t_s) df$$

równa się substancjalnej zmianie (ubytkowi) entalpii płynu znajdującego się w tym wycinku kanału o objętości $S_1 dx$

$$- c_{p1} \rho_1 S_1 dx \frac{Dt_1}{Dt}$$

Po porównaniu powyższych wyrażeń i po rozwinięciu pochodnej substancjalnej otrzymujemy

$$c_{p1} \rho_1 S_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \right) dx + \alpha_1 (t_1 - t_s) df = 0.$$

Różniczkę dx rugujemy za pomocą równania (20.38) otrzymując

$$c_{p1} \rho_1 S_1 \frac{L}{A} \left(\frac{\partial t_1}{\partial t} + \frac{A}{L} w_1 \frac{\partial t_1}{\partial f} \right) + \alpha_1 (t_1 - t_s) = 0. \quad (20.39)$$

Wprowadzamy następnie tzw. czas martwy, tzn. czas, po którym zmiana temperatury na dolocie płynu 1 pojawi się na wylocie. Jest on równy czasowi przepływu cząstki płynu przez wymiennik i z uwagi na stałą szybkość przepływu wynosi

$$\tau_1 = \frac{L}{w_1}. \quad (20.40)$$

Ponadto wykorzystamy zdefiniowane wcześniej pojęcie pojemności cieplnej (20.3)

$$w_1 = \dot{m}_1 c_{p1} = \dot{V}_1 \rho_1 c_{p1} = \rho_1 w_1 \rho_1 c_{p1}. \quad (20.41)$$

Podstawiając zależności (20.40) i (20.41) do równania (20.39) otrzymujemy ostatecznie

$$\tau_1 \frac{\partial t_1}{\partial \tau} + A \frac{\partial t_1}{\partial f} + \frac{\alpha_1 A}{W_1} (t_1 - t_s) = 0. \quad (20.42)$$

Analogiczne równanie obowiązuje dla płynu 2

$$\tau_2 \frac{\partial t_2}{\partial \tau} + A \frac{\partial t_2}{\partial f} + \frac{\alpha_2 A}{W_2} (t_2 - t_s) = 0. \quad (20.43)$$

natomiast dla ścianki mamy równanie

$$\frac{\partial t_s}{\partial \tau} + \frac{\alpha_1}{c_s \rho_s \delta_s} (t_s - t_1) + \frac{\alpha_2}{c_s \rho_s \delta_s} (t_s - t_2) = 0 \quad (20.44)$$

wynikające z porównania przyrostu energii elementu ścianki

$$c_s \rho_s \delta_s df \frac{\partial t_s}{\partial \tau}$$

z sumą strumieni ciepła dostarczanych do niej z obu jej stron

$$\alpha_1 (t_1 - t_s) df + \alpha_2 (t_2 - t_s) df.$$

Układ równań różniczkowych (20.41)-(20.43) umożliwia, po dołączeniu doń warunków brzegowych i początkowych, wyznaczenie funkcji $t_1(\tau, f)$, $t_2(\tau, f)$ i $t_s(\tau, f)$. Z punktu widzenia potrzeb praktycznych interesujące są przebiegi czasowe temperatur wylotowych płynów

$$t_{1k}(\tau) = t_1(\tau, A),$$

$$t_{2k}(\tau) = t_2(\tau, A).$$

Można tu również zastosować zmienne bezwymiarowe: zredukowane czasy (liczby Fouriera)

$$Fo = \frac{a \tau}{\delta_s^2}; \quad Fo_1 = \frac{a \tau_1}{\delta_s^2}; \quad Fo_2 = \frac{a \tau_2}{\delta_s^2}$$

liczby Bicta

$$Bi_1 = \frac{\alpha_1 \delta_s}{\lambda_s}, \quad Bi_2 = \frac{\alpha_2 \delta_s}{\lambda_s},$$

zredukowaną powierzchnię

$$\varphi = \frac{f}{A},$$

oraz zredukowaną temperaturę θ , której definicja zależna jest od warunków początkowych i brzegowych. Bezwymiarowa postać równań (20.41)-(20.43) jest następująca

$$Fo_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial Fo} + \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi} + \frac{\alpha_1 A}{W_1} (\theta_1 - \theta_s) = 0 \quad (20.42a)$$

$$Fo_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial Fo} + \frac{\partial \theta_2}{\partial \varphi} + \frac{\alpha_2 A}{W_2} (\theta_2 - \theta_s) = 0 \quad (20.43a)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial Fo} + Bi_1 (\theta_s - \theta_1) + Bi_2 (\theta_s - \theta_2) = 0. \quad (20.44a)$$

Jeżeli pominiemy pojemność cieplną ścianki, uwzględniając jedynie jej opór przewodzenia (składnik współczynnika przenikania ciepła), to otrzymamy układ dwóch równań różniczkowych dla temperatur płynów t_1 i t_2

$$\tau_1 \frac{\partial t_1}{\partial \tau} + A \frac{\partial t_1}{\partial f} + \frac{kA}{W_1} (t_1 - t_2) = 0, \quad (20.45)$$

$$\tau_2 \frac{\partial t_2}{\partial \tau} + A \frac{\partial t_2}{\partial f} + \frac{kA}{W_2} (t_2 - t_1) = 0, \quad (20.46)$$

dający się wyprowadzić w sposób analogiczny do przytoczonego wyprowadzenia równania (20.41).

Właściwości fizyczne gazów technicznych

Gaz	Symbol chemiczny	Masa drobiowa M kg/kmol	Stała gazowa R J/(kg deg)	Gęstość normalna kg/nm ³ t _n = 0°C p _n = 760 Tr		Ciepło właściwe przy 0°C c _p kJ/kg deg	Wykładnik izentropowy przy 0°C	Parametry krytyczne		
				obliczona	zmierzona			t _K	P _K bar	c _K kg/m ³
Acetylen	C ₂ H ₂	26,04	319,60	1,1607	1,1709	1,641	1,23	36,5	62,4	0,231
Amoniak	NH ₃	17,03	488,18	0,7597	0,7714	2,060	1,32	132,3	112,8	0,235
Argon	Ar	39,94	208,20	1,7821	1,7839	0,523	1,67	-122,4	48,6	0,531
Azot	N ₂	28,02	296,75	1,2499	1,2505	1,043	1,40	-147,0	33,9	0,311
Azot powietrzny	-	28,15	295,38	1,2558	1,2567	1,030	1,40	-	-	-
Chlorek metylu	CH ₃ Cl	50,49	164,75	2,2522	2,307	0,737	1,20	143,1	66,8	0,353
Dwutlenek siarki	SO ₂	64,07	129,84	2,8581	2,9263	0,632	1,40	157,5	78,8	0,524
Dwutlenek węgla	CO ₂	44,01	188,78	1,9634	1,9768	0,825	1,31	31,04	73,9	0,468
Etan	C ₂ H ₆	30,07	276,74	1,3406	1,3560	1,666	1,22	32,2	48,8	0,203
Etylen	C ₂ H ₄	28,05	296,65	1,2506	1,2605	1,465	1,24	9,2	50,7	0,227
Hel	He	4,003	2079,01	0,1705	0,1785	5,234	1,66	-267,9	2,29	0,0693
Metan	CH ₄	16,04	518,77	0,7152	0,7173	2,177	1,30	-82,1	46,4	0,162
Para wodna	H ₂ O	18,02	461,50	-	-	1,859	1,33	374,15	221,29	0,307
Powietrze	-	28,96	287,04	1,2922	1,2928	1,001	1,40	-140,7	37,7	0,31
Siarkowodór	H ₂ S	34,08	244,19	1,5204	1,5392	1,105	1,30	100,4	90,1	0,349
Tlen	O ₂	32,00	259,78	1,4276	1,4289	0,913	1,40	-118,4	50,8	0,410
Tlenek węgla	CO	28,01	296,95	1,2495	1,2500	1,051	1,40	-140,2	35,0	0,301
Wodór	H ₂	2,016	4121,73	0,0894	0,0899	14,235	1,41	-239,9	12,97	0,031

Średnie ciepło właściwe (M₀)^t₀ kJ/(kmol deg) gazów doskonałych

t °C	H ₂	O ₂	N ₂	N ₂ pow	Powietrze	CO	H ₂ O	CO ₂	CH ₄	C ₂ H ₆
0	20,302	20,959	20,800	20,704	20,758	20,808	25,184	27,545	26,423	41,215
100	20,620	21,223	20,829	20,733	20,838	20,863	25,426	29,797	28,491	47,604
200	20,758	21,616	20,913	20,800	20,984	20,988	25,803	31,744	31,112	53,880
300	20,808	22,085	21,068	20,972	21,206	21,202	26,260	33,440	33,959	59,917
400	20,871	22,563	21,286	21,185	21,474	21,474	26,775	34,935	36,865	65,846
500	20,934	23,019	21,549	21,449	21,780	21,784	27,315	36,258	39,662	71,314
600	21,001	23,446	21,834	21,729	22,090	22,110	27,880	37,438	42,358	76,359
700	21,093	23,835	22,136	22,027	22,408	22,437	28,474	38,498	44,962	81,040
800	21,202	24,187	22,433	22,320	22,713	22,755	29,077	39,448	47,587	85,398
900	21,332	24,510	22,722	22,609	23,006	23,061	29,693	40,302	50,016	89,451
1 000	21,474	24,803	22,998	22,881	23,283	23,350	30,304	41,077	52,188	93,211
1 100	21,629	25,071	23,262	23,140	23,547	23,622	30,911	41,784	54,140	96,669
1 200	21,792	25,318	23,513	23,392	23,794	23,877	31,510	42,425	55,860	99,847
1 300	21,972	25,548	23,752	23,626	24,028	24,112	32,092	43,007		
1 400	22,152	25,761	23,978	23,848	24,250	24,338	32,661	43,543		
1 500	22,332	25,967	24,187	24,057	24,459	24,543	33,210	44,033		
1 600	22,517	26,159	24,384	24,250	24,652	24,736	33,741	44,485		
1 700	22,697	26,343	24,568	24,434	24,836	24,916	34,261	44,903		
1 800	22,877	26,519	24,740	24,602	25,004	25,087	34,755	45,289		
1 900	23,057	26,691	24,903	24,765	25,167	25,246	35,224	45,644		
2 000	23,233	26,854	25,058	24,916	25,326	25,393	35,680	45,975		
2 100	23,408	27,013	25,205	25,062	25,472	25,535	36,120	46,281		
2 200	23,576	27,168	25,343	25,200	25,611	25,665	36,538	46,566		
2 300	23,743	27,319	25,472	25,326	25,745	25,791	36,940	46,829		
2 400	23,907	27,470	25,594	25,447	25,870	25,908	37,330	47,076		
2 500	24,070	27,612	25,707	25,560	25,992	26,021	37,702	47,302		
2 600	24,225	27,754					38,066			
2 700	24,376	27,892					38,414			

Tablica 3

Średnie ciepło właściwe (M_{cv})₀^T kJ/(kmol deg) gazów półdoskonalskich

T °K	H ₂	O ₂	N ₂	CO	Powietrze	H ₂ O	CO ₂	CH ₄	NH ₃
273	20,063	20,56	20,762	20,767	20,64	24,811	22,61	25,171	25,259
300	20,088	20,64	20,767	20,771	20,662	24,849	23,15	25,334	25,410
350	20,172	20,81	20,779	20,787	-	24,916	24,16	25,791	25,745
400	20,256	20,967	20,792	20,804	20,754	25,008	25,16	26,435	26,214
500	20,386	21,198	20,850	20,892	20,888	25,259	27,13	28,194	27,290
600	20,478	21,549	20,963	21,047	21,009	25,594	28,93	30,296	28,533
700	20,570	21,935	21,131	21,256	21,219	26,000	30,52	32,644	29,869
800	20,649	22,328	21,340	21,508	21,357	26,452	32,11	34,985	31,217
900	20,737	22,722	21,579	21,780	21,734	26,934	33,45	37,384	32,582
1000	20,838	23,082	21,834	22,060	22,010	27,428	34,62	39,636	33,947
1100	20,959	23,413	22,073	22,349	22,265	27,972	35,59	41,78	35,270
1200	21,076	23,727	22,332	22,621	22,533	28,533	36,72	43,96	36,580
1300	21,219	24,015	22,575	22,889	22,785	29,094	37,68	46,01	37,89
1400	21,361	24,288	22,826	23,136	23,036	29,647	38,43	48,15	
1500	21,537	24,547	23,078	23,387	23,287	30,187	39,19		
1600	21,696	24,773	23,312	23,609	23,521	30,723	39,82		
1700	21,872	24,978	23,534	23,823	23,735	31,250	40,44		
1800	22,048	25,163	23,743	24,032	23,936	31,757	41,03		
1900	22,224	25,368	23,936	24,225	24,133	32,255	41,62		
2000	22,399	25,498	24,129	24,413	24,309	32,74	42,08		
2100	22,575	25,707	24,300	24,585	24,484	33,20	42,54		
2200	22,751	25,856	24,451	24,748	24,635	33,62	42,96		
2300	22,919	26,000	24,618	24,899	24,794	34,08	43,38		
2400	23,082	26,130	24,752	25,045	24,928	34,50	43,75		
2500	23,253	26,268	24,886	25,179	25,062	34,92	44,09		
2600	23,408	26,377	25,025	25,318	25,192	35,30	44,42		
2700	23,567	26,494	25,154	25,447	25,318	35,67	44,72		
2800	23,752	26,599	25,288	25,569	25,430	36,05	45,01		
2900	23,886	26,708	25,401	25,682	25,556	36,38	45,26		
3000	24,045	26,812	25,519	25,782	25,559	36,72	45,47		

Tablica 4

Entalpia fizyczna gazów półdoskonalskich¹⁾ (MJ)₀^t kJ/kmol

t °C	H ₂	O ₂	N ₂	H ₂ pow	Powietrze ²⁾	CO	H ₂ O	CO ₂	CH ₄	C ₂ H ₆
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	723,5	738,5	729,5	726,2	728,8	729,5	843,5	973,8	920,3	1399
100	2893	2954	2914	2905	2915	2918	3374	3811	3681	5594
200	5815	5987	5845	5828	5862	5862	6825	8014	7884	12439
300	8738	9119	8813	8788	8855	8855	10371	12527	12682	20469
400	11673	12351	11840	11798	11916	11916	14034	17300	18070	29663
500	14624	15687	14934	14884	15047	15052	17815	22286	23986	39812
600	17580	19058	18091	18028	18242	18254	21717	27453	30405	50786
700	20586	22504	21315	21240	21508	21529	25753	32770	37292	62551
800	23613	26000	24597	24510	24824	24857	29915	38209	44715	74986
900	26632	29542	27934	27830	28190	28240	34206	43752	52502	88007
1000	29789	33118	31313	31196	31598	31665	38619	49404	60499	101530
1100	32938	36722	34734	34600	35048	35131	43166	55098	68705	115472
1200	36128	40361	38192	38050	38531	38632	47771	60876	76995	129791
1300	39373	44003	41688	41525	42035	42161	52544	66739		
1400	42663	47688	45227	45008	45594	45720	57359	72599		
1500	45971	51414	48734	48559	49153	49279	62300	78503		
1600	49321	55140	52335	52084	52754	52879	67282	84490		
1700	52712	58908	55894	55684	56354	56480	72390	90477		
1800	56145	62718	59494	59243	59955	60122	77540	96506		
1900	59620	66528	63095	62844	63597	63755	82731	102535		
2000	63095	70338	66738	66445	67282	67407	88007	108564		
2100	66612	74190	70380	70087	70966	71092	93324	114635		
2200	70171	78042	74064	73730	74651	74776	98683	120747		
2300	73730	81936	77707	77372	78335	78461	104084	126618		
2400	77330	85871	81391	81015	82061	82145	109548	132931		
2500	80972	89807	85076	84699	85788	85829	115053	139044		
2600	84615	93784	-	-	-	-	120622	-		
2700	88258	97762	-	-	-	-	126190	-		
3000	99520	109904	130749	-	-	104503	141053	169775		

1) Według: M.P. Wukałowicz, W.A. Kirillin i drug. Termodynamiceskije swojstwa gazow. Moskwa 1953.

2) Udziały molowe składników suchego powietrza: N₂ = 78,025%, O₂ = 21,000%, gazy jednoat. = 0,930%.