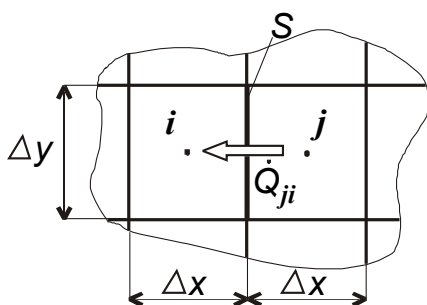


ROZWIĄZYWANIE DWUWYMIAROWYCH USTALONYCH ZAGADNIENIŃ PRZEWODZENIA CIEPŁA PRZY POMOCY ARKUSZA KALKULACYJNEGO

OPIS METODY

Do rozwiązania ustalonego pola temperatury wykorzystana jest metoda bilansów elementarnych. W metodzie tej dokonuje się dyskretyzacji przestrzeni poprzez dokonanie podziału różnicowego obszaru na elementy – komórki bilansowe. Dla kartezjańskiego układu współrzędnych i obszaru płaskiego (dwuwymiarowego) komórkami tymi mogą być prostokąty o bokach Δx , Δy . W tej metodzie wielkością fizyczną podlegającą bilansowaniu jest energia.



$$\dot{Q}_{ji} = \frac{T_j - T_i}{R_{jS} + R_{Si}} = k_{ji}(T_j - T_i)$$

Opory przewodzenia ciepła

$$R_{jS} = \frac{\Delta x}{2\lambda_j \Delta y \cdot 1} \quad R_{Si} = \frac{\Delta x}{2\lambda_i \Delta y \cdot 1}$$

Opory cieplne w połączeniu szeregowym sumują się i przewodność k_{ji} wyraża zależność:

$$\frac{1}{k_{ji}} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \left(\frac{1}{2\lambda_j} + \frac{1}{2\lambda_i} \right)$$

Przewodność k_{ji} jest średnią harmoniczną z oporów cieplnych. Bilans energii przy uwzględnieniu działania objętościowego źródła ciepła q_{vi} wyraża dla komórki „i” równanie:

$$\sum_j \dot{Q}_{ji} + \dot{q}_{Vi} \Delta x \Delta y \cdot 1 = 0$$

które po prostych przekształceniach prowadzi do związku między temperaturami:

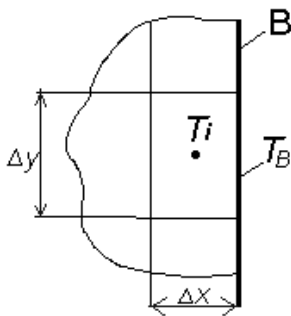
$$T_i = \frac{\sum_j k_{ji} T_j + \dot{q}_{Vi} \Delta x \Delta y}{\sum_j k_{ji}}$$

W obszarze jednorodnym ($\lambda = \text{idem}$) i bezźródłowym, dla siatki kwadratowej ($\Delta x = \Delta y$) temperatura w węźle „i” jest średnią arytmetyczną z temperatur w węzłach sąsiednich.

WARUNKI BRZEGOWE

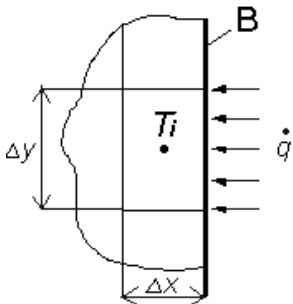
$$\dot{Q}_{Bi} = \frac{T_B - T_i}{R_{Bi}} = \frac{T_B - T_i}{\frac{\Delta x}{2\lambda_i \Delta y \cdot 1}} = k_{Bi} (T_B - T_i)$$

I rodzaju (znana temperatura T_B na brzegu)



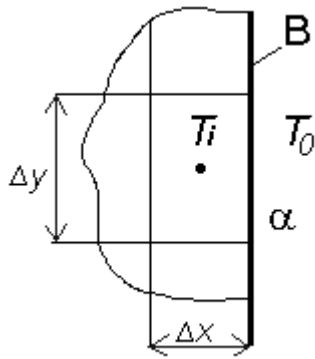
gdzie $\frac{1}{k_{Bi}} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{1}{2\lambda_i}$

II rodzaju (znana gęstość strumienia ciepła \dot{q} na brzegu)



$$\dot{Q}_{Bi} = \dot{q} \Delta y \cdot 1$$

III rodzaju (konwekcyjna wymiana ciepła z płynem o temperaturze T_0 , przy współczynniku wnikania ciepła α)



$$\dot{Q}_{Bi} = \frac{T_0 - T_i}{R_{0B} + R_{Bi}} = k_{0i}(T_0 - T_i)$$

$$\text{gdzie } \frac{1}{k_{0i}} = \frac{1}{\alpha \Delta y \cdot 1} + \frac{\Delta x}{2\lambda_i \Delta y \cdot 1}$$

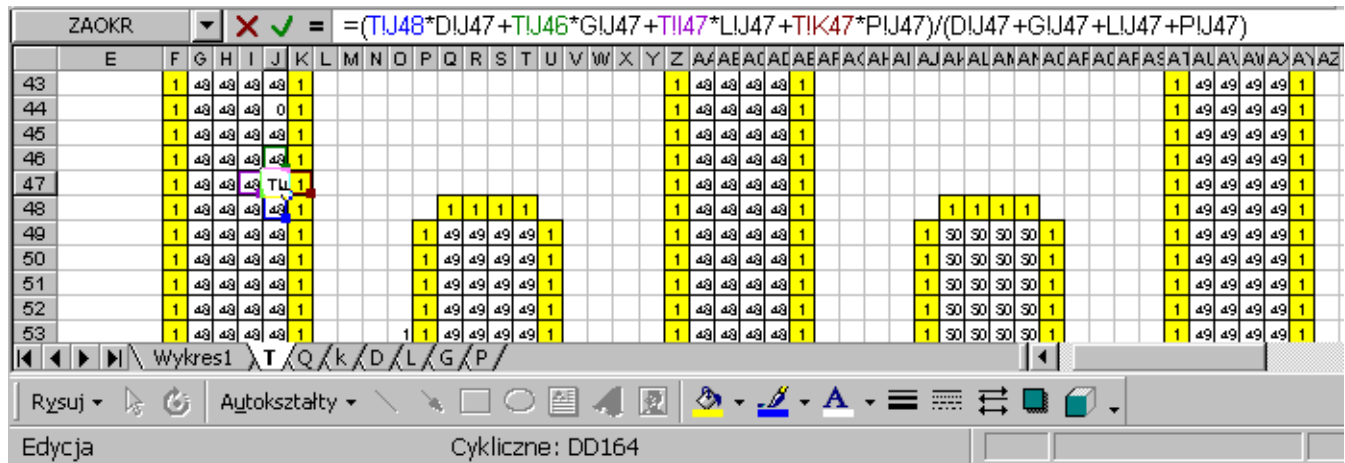
IV rodzaju

W przypadku styku idealnego (brak oporów cieplnych) dwu obszarów różniących się współczynnikami przewodzenia ciepła jest uwzględniony we wzorach, gdy ich powierzchnia styku pokrywa się z granicą komórek. Można to zapewnić przez dobór wielkości kroku przy podziale różnicowym.

PRZYGOTOWANIE ARKUSZA DO OBLICZEŃ

- Tworzy się skoroszyt grupujący arkusze o nazwach:

T – gdzie obliczane są temperatury w komórkach obszaru i ewentualnie rysowany wykres powierzchniowy pola temperatury,



Widoczna powyżej formuła jest skopiowana adaptacyjnie do wszystkich komórek obszaru

q – który zawiera dane o wydajności źródeł ciepła w poszczególnych komórkach,

k – gdzie znajdują się dane dotyczące współczynnika przewodzenia ciepła w poszczególnych komórkach rozważanego obszaru (współczynnik ten może być funkcją temperatury),

I – który zawiera przewodności cieplne pomiędzy daną komórką, a komórką sąsiadującą z „lewej” strony,

g – który zawiera przewodności cieplne pomiędzy daną komórką, a komórką sąsiadującą „od góry”,

p – który zawiera przewodności cieplne pomiędzy daną komórką, a komórką sąsiadującą z „prawej” strony,

d – który zawiera przewodności cieplne pomiędzy daną komórką, a komórką sąsiadującą „od dołu”.

- Ustawia się iteracyjny tryb obliczeń

W menu programu Excel: narzędzia-opcje-przeliczanie należy ustawić opcje: iteracje (podać liczbę iteracji) i ręczny tryb obliczeń.

- Przeprowadza się kolejne cykle iteracyjne N (obejmujące taką samą liczbę iteracji) i notuje wartości

strumienia ciepła \dot{Q}_N dla wybranego brzegu.

- Wyznacza się iloraz ciągu dla przyrostów wartości strumienia \dot{Q}_N :

$$p_N = \frac{\dot{Q}_{N+1} - \dot{Q}_N}{\dot{Q}_N - \dot{Q}_{N-1}},$$

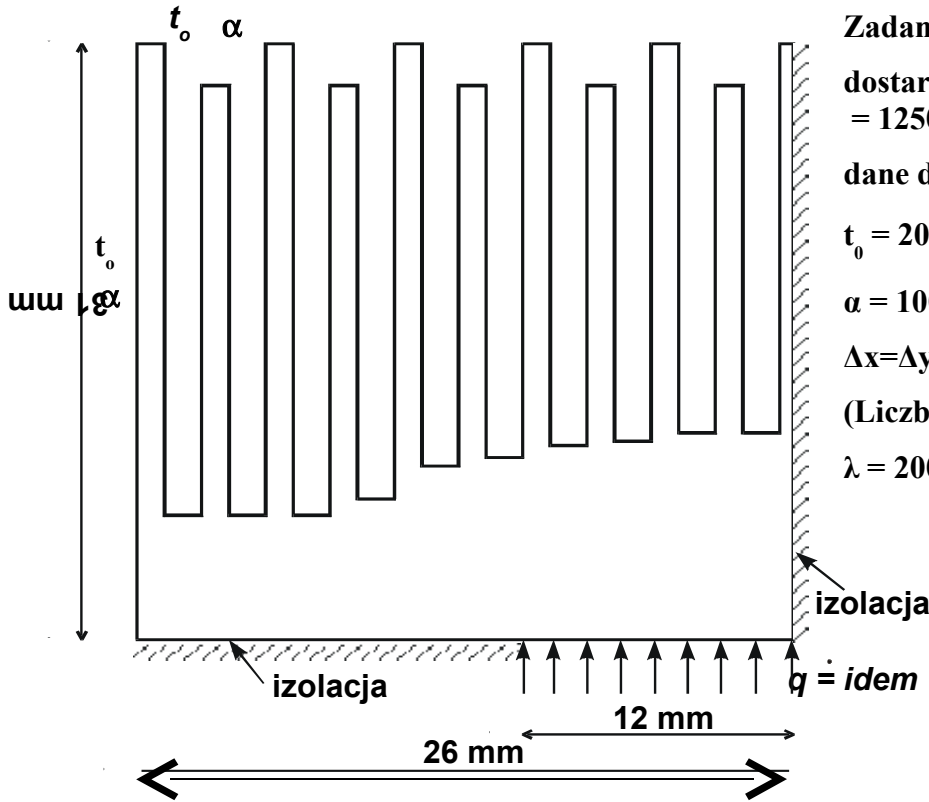
- Droga obliczeń określa się liczbę cykli iteracyjnych N po wykonaniu których p_N można uznać za stały

- Oblicza się przybliżenie wartości dokładnej strumienia ciepła dla wybranego brzegu:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_N + \frac{\dot{Q}_{N+1} - \dot{Q}_N}{1 - p_N}$$

Przykład obliczeniowy I

W celu zilustrowania prezentowanej metody rozwiązano przy pomocy arkusza kalkulacyjnego ustalone zagadnienie przewodzenia ciepła w płaskim przekroju radiatora stosowanego do chłodzenia elektronicznego układu scalonego jak na rysunku



Zadany strumień ciepła

dostarczonego:
= 1250 W/m

dane do obliczeń:

$t_0 = 20^{\circ}\text{C}$

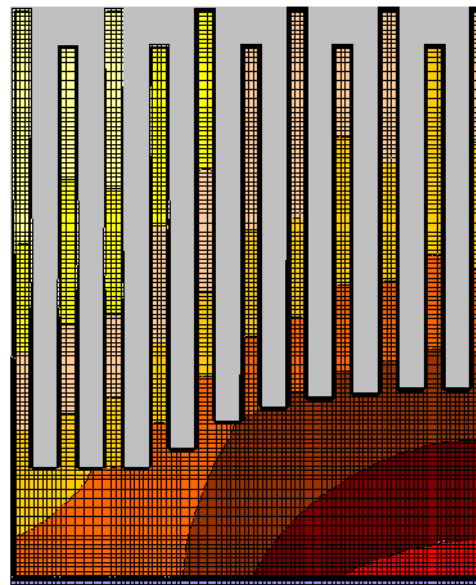
$\alpha = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$

$\Delta x = \Delta y = 0,25 \text{ mm}$

(Liczba komórek bilansowych – 7040)

$\lambda = 200 \text{ W/mK}$

n	Qd	Gw	błąd Qw (%)	wartość porosa, p	Gw względna różnica p (%)	wartość przybliżona Q	błąd przybliżenia (%)	
175	2000	1250,0	26,8008					
176	4000	1250,0	62,2753					
177	6000	1250,0	98,7205		1,3887			
178	8000	1250,0	135,1553		1,3775			
179	10000	1250,0	171,5700	0,1144	0,3009	2,0023	30024,4717	2000,9077
180	12000	1250,0	208,0346	83,1638	0,3991	1,3001	25289,960	10,11567
181	14000	1250,0	244,5427	80,2526	0,3765	0,8253	739,0463	28,1237
182	16000	1250,0	281,0300	77,4068	0,3720	0,4713	405,4650	10,6373
183	18000	1250,0	317,5479	74,7866	0,3594	0,2733	388,6648	11,0932
184	20000	1250,0	354,0500	72,1055	0,3370	0,1093	304,0945	0,7270
185	22000	1250,0	390,5531	69,4275	0,3368	0,1052	308,6111	4,2939
186	24000	1250,0	427,0543	67,1772	0,3367	0,0837	285,4979	2,8333
187	26000	1250,0	463,5543	64,8100	0,3368	0,0457	274,2108	1,0330
188	28000	1250,0	500,0543	62,5462	0,3365	0,0312	266,9001	1,3521
189	30000	1250,0	536,5543	60,2203	0,3300	0,0223	262,0119	0,3010
190	32000	1250,0	573,0543	58,1625	0,3261	0,0153	258,6571	0,6925
191	34000	1250,0	609,5543	56,1396	0,3360	0,0115	256,3058	0,5745
192	36000	1250,0	646,0543	54,1007	0,3349	0,0000	254,6000	0,3734
193	38000	1250,0	682,5543	52,0445	0,3349	0,0055	253,4200	0,2737
194	40000	1250,0	719,0543	50,2885	0,3348	0,0043	252,5367	0,2031
195	42000	1250,0	755,5543	48,8105	0,3348	0,0037	251,8006	0,1512
196	44000	1250,0	792,0543	46,8722	0,3348	0,0029	251,4117	0,1129
197	46000	1250,0	828,5543	45,2405	0,3347	0,0022	251,0502	0,0845
198	48000	1250,0	865,0543	43,8172	0,3347	0,0017	250,7915	0,0633
199	50000	1250,0	901,5543	42,1053	0,3347	0,0013	250,5938	0,0475
200	52000	1250,0	938,0543	40,8170	0,3347	0,0010	250,4450	0,0357
201	54000	1250,0	974,5543	39,1639	0,3347	0,0008	250,3351	0,0283
202	56000	1250,0	1011,0543	37,7800	0,3347	0,0000	250,2519	0,0202
203	58000	1250,0	1047,5543	36,4022	0,3347	0,0000	250,1895	0,0152
204	60000	1250,0	1084,0543	35,1200	0,3347	0,0004	250,1420	0,0114
200	512000	1250	1248,87339	0,0104	0,3347	0,0000	250,1428	0,0000
209	514000	1250	1248,07347	0,0100	0,3347	0,0000	250,1428	0,0000



Przykład obliczeniowy II

